Übungen Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2020**
https://www.risc.jku.at/education/courses/ws2020/mathematik1/

Übungsblatt 8 mit Lösungen

Besprechung am **03.12.2020**

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ stetig ist.

Aufgabe 2 Seien $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in (a,b). Zeigen Sie:

a) $f \cdot g$ ist stetig in (a,b).

b) Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in (a,b).

Aufgabe 3 Beweisen Sie Satz 4.17:

$$f\colon (a,b) \longrightarrow (c,d) \text{ und } g\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \Rightarrow g \circ f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig.}$$

Aufgabe 4

a) Sei (a_n) eine beschränkte Folge und (h_n) eine Nullfolge. Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} a_n h_n = 0$.

b) Verwenden Sie Punkt a) um zu zeigen, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \ldots\ x \neq 0 \\ 0 & \ldots\ x = 0 \end{cases}$$

stetig an der Stelle 0 ist.

Aufgabe 5 Es sei $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und $x \in (a,b)$. Zeigen Sie:

$$f \text{ ist stetig in } x \iff \forall_{\xi \in (a,b)^{\mathbb{N}}} \left(\lim_{n\to\infty} \xi_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(x) \right).$$

Aufgabe 6 In Analogie zu Def. 3.23 nennt man eine beliebige Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ *nach oben beschränkt*, wenn es ein $T \in \mathbb{R}$ gibt, sodaß $\forall_{x\in X}\, x \leq T$ gilt; so ein T heißt naheliegenderweise eine *obere Schranke* von X. Das *Supremum* von X ist die kleinste obere Schranke von X, das ist also ein T, welches die beiden Bedingungen

a) $\forall_{x\in X}\, x \leq T$;

b) $\forall_{S\in\mathbb{R}} \big(\forall_{x\in X}\, x \leq S \Rightarrow T \leq S\big)$

erfüllt. Nicht jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum, z.B. ist $\mathbb{R}$ selbst nach oben (wie auch nach unten) unbeschränkt. Es gilt aber:

Jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen hat ein Supremum!

Falls eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ also überhaupt nach oben beschränkt ist, so hat sie auch eine kleinste obere Schranke.

Zeigen Sie - unter Verwendung diese Satzes - dass die Menge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ keine obere Schranke in $\mathbb{R}$ hat.

Aufgabe 7 Beweisen Sie, dass jedes offene Intervall (a, b) mit $a < b$ unendlich viele rationale Zahlen enthält.

Anleitung: Zeigen Sie zuerst, dass (a, b) ein $x \in \mathbb{Q}$ enthält.

Aufgabe 8 Die Funktion dir ist definiert durch

$$\mathrm{dir}(x) = \begin{cases} 1 & \ldots\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \ldots\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dir an keiner Stelle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.