Übungen Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2020**
https://www.risc.jku.at/education/courses/ws2020/mathematik1/

Übungsblatt 7

Besprechung am **26.11.2020**

Aufgabe 1 Zeigen Sie Satz 3.25:

> Jede nach oben beschränkte reelle Folge (a_n) hat ein Supremum.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die angeführten Folgen konvergieren.

$$a)\ a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \qquad b)\ b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

Aufgabe 3 Wir bezeichnen, wie üblich, den Limes der Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ mit e.

a) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}$;

b) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.

Aufgabe 4 Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

> α ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$ $\iff$ jedes α enthaltende offene Intervall enthält Folgenglieder a_n von beliebig großem Index n.

Anleitung: Zu zeigen ist:

$$\exists \text{ streng monoton wachsende Folge } i_1 < i_2 < \cdots \text{ natürlicher Zahlen mit } \lim_{n\to\infty} a_{i_n} = \alpha$$
$$\iff \forall_{u,v\in\mathbb{R}}, \forall_{N\in\mathbb{N}}, \big(u < \alpha < v \Rightarrow \exists_{n\geq N} \text{ mit } u < a_n < v\big)$$

Aufgabe 5 Dual zum Begriff des Supremums einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ bezeichnet das `Infimum` von $(a_n)_{n\geq 1}$ die größte untere Schranke: $S = \inf_{n\geq 1} a_n \iff$

- $\forall n \in \mathbb{N} : S \leq a_n$ und
- $\forall_T \big(\forall_{n\in\mathbb{N}}\, T \leq a_n \Rightarrow T \leq S\big)$.

Zeigen Sie, dass jede nach unten beschränkte Folge ein Infimum hat, und, dass dieses eindeutig ist.

Aufgabe 6 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{n\to\infty} \big((-1)^n 2^{-n} + \frac{n-1}{n}\big)$;

b) $\lim_{n\to\infty} \big(\frac{5}{2n} + \frac{n}{n+2}\big)$;

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2+n+1}{3n^2+2}$.

Aufgabe 7 Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$. Setzen Sie dazu $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$, und schätzen Sie $(1 + a_n)^n = n$ mit der binomischen Formel ab.