Übungen Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2020**
`https://www.risc.jku.at/education/courses/ws2020/mathematik1/`

Übungsblatt 6

Besprechung am **19.11.2020**

Aufgabe 1 Berechnen Sie folgende Grenzwerte, indem Sie zuerst den Ausdruck vereinfachen und dann Satz 3.10, Beispiele 3.6, 3.7, 3.11, oder Aufgaben von Blatt 5 verwenden.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+2n^2+1}{6n^3+n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(4n - \frac{(2n-1)^2}{n}\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

Aufgabe 2 Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ einen Folge mit $a_n > 0$ für alle n. Beweisen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Aufgabe 3 Untersuchen Sie, ob die Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergieren, und bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

a) $a_n = \frac{n!}{2^n}$ b) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

Aufgabe 4 Beweisen Sie Satz 3.19 aus dem Skriptum: Jede nach unten beschränkte monoton fallende Folge $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist konvergent. D.h. es gibt ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Hinweis: Verwenden Sie Satz 3.18.

Aufgabe 5 Vervollständigen Sie das Beispiel 3.21 aus der Vorlesung, indem Sie zeigen, dass:

(a) Die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ monoton wachsend ist.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} < 2$.

Aufgabe 6 Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ sei gegeben durch die Rekursionsgleichung

$$x_0 = 3 \text{ und } x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right) \text{ für } n \geq 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\geq 0}$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist.

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe 7 Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$.