Übungsblatt 5

Besprechung am **12.11.2020**

Aufgabe 1 Berechnen Sie die exakten Werte (d.h. keine Gleitkommazahlen) von:

a) $\cos(\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}))$	c) $\tan(\frac{\pi}{2})$	e) $\sin(\sin^{-1}(2))$
b) $\cos^{-1}(\sin(5\pi))$	d) $\tan(\cos^{-1}(\frac{1}{2}))$	f) $\sin^{-1}(\sin(2))$

Alle Winkel werden in Bogenmaß (radians) eingegeben.

Aufgabe 2 Es seien $n > 0$ eine natürliche Zahl und $x = (x_1, \ldots, x_n)$ eine endliche Folge strikt positiver reeller Zahlen ($x_i > 0$) mit der Eigenschaft $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$. Zeigen Sie, dass dann $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$.

Aufgabe 3 Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ fest gewählt und $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie mit Definition 3.5 (bzw. (6)) aus dem Skriptum: (a) $\lim_{n\to\infty} \lambda = \lambda$; (b) $\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a$; (c) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Aufgabe 4 Sei $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie mit Definition 3.5 (bzw. (6)) aus dem Skriptum: (a) Wenn $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $a \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$; (b) Wenn $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Aufgabe 5 Seien $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$ eine reelle Zahl und $a^{(n)} = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ die rationale Zahl. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} a^{(n)} = a$.

Aufgabe 6 Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ Folgen mit den Eigenschaften

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n \text{ und } \forall\ n \geq 0 : a_n \geq b_n \geq c_n.$$

Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Aufgabe 7 Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Beweisen Sie die folgende Aussage aus der Vorlesung:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass sowohl $\lim_{n\to\infty} (a_n - a)\, b_n = 0$ als auch $\lim_{n\to\infty} (b_n - b)\, a = 0$.