

# Übungsblatt 4

Besprechung am 05.11.2020

---

**Aufgabe 1** Beweisen Sie Lemma 1.40 aus dem Skriptum: Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

- a)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ ,
- b)  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ .

**Aufgabe 2** Beweisen Sie Lemma 1.42 aus dem Skriptum: für alle  $a, b \in [0, \infty)$ , gilt  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ , wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn  $a = b$ .

**Aufgabe 3** Es sei  $b > 0$ . Beschreiben Sie die Menge all jener Zahlen  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , für die  $\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$  gilt, als Vereinigung von Intervallen.

**Aufgabe 4** Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$  abzählbar ist.

**Aufgabe 5** Seien  $a$  und  $b$  berechenbare reelle Zahlen. Zeigen Sie unter der Verwendung von Definition 1.43 des Skripts, dass dann auch  $a + b$  eine berechenbare reelle Zahl ist.

**Aufgabe 6** Seien  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  zwei bijektive Funktionen. Wir definieren  $h : A \rightarrow C$  durch  $h(x) = g(f(x))$  (auch  $h = g \circ f$  geschrieben). Zeigen Sie:

- a)  $f^{-1}$  ist ebenfalls bijektiv.
- b)  $h^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x))$  für alle  $x \in C$ .

**Aufgabe 7** Beweisen Sie den Satz von Pythagoras (Satz 2.6 im Skript). Eine graphische Argumentation ist zulässig.

**Aufgabe 8** Beweisen Sie Lemma 2.7 im Skript, d.h. für  $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ)$ ,

- a)  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ ,
- b)  $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ ,
- c)  $\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ ,
- d)  $\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$ .

Eine graphische Argumentation ist zulässig.