

## Übungsblatt 3

Besprechung am **29.10.2020**, bitte im Moodle kreuzen.

---

**Aufgabe 1** Welche der folgenden Funktionen sind injektiv/surjektiv/bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

a)  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto 3x + 5$

b)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ <sup>1</sup>      c)  $g : \{a, b\} \rightarrow \{a, b, c, d\}, a \mapsto d, b \mapsto a$

**Aufgabe 2** Welche der folgenden Funktionen sind injektiv/surjektiv/bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

a)  $f : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0, (a, b) \mapsto a + 2b$     b)  $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2+4}{x-2}$     c)  $h : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2-4}{x-2}$

**Aufgabe 3** Seien  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  zwei Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- a) Wenn  $f$  und  $g$  injektiv sind, ist auch  $g \circ f$  injektiv.  
b) Wenn  $f$  und  $g$  surjektiv sind, ist auch  $g \circ f$  surjektiv.

Hierbei ist wie üblich  $g \circ f : A \rightarrow C$  mit  $x \mapsto g(f(x))$ .

**Aufgabe 4** Zeigen Sie, dass die Umkehrung der Aussage in der vorigen Aufgabe *nicht* gilt. D. h. finden Sie Mengen  $A, B, C$  und Funktionen  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$ , sodass

- a)  $g \circ f$  injektiv ist, aber  $f$  oder  $g$  nicht injektiv ist.  
b)  $g \circ f$  surjektiv ist, aber  $f$  oder  $g$  nicht surjektiv ist.

**Aufgabe 5** Überprüfen Sie, ob die folgenden Relationen (lineare) Ordnungsrelationen auf der Menge  $M$  sind.

- a)  $M = \mathbb{N}_0^2, (a, b) \preceq (c, d) :\Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$   
b)  $M = \mathbb{N}_0^2, (a, b) \preceq (c, d) :\Leftrightarrow a \leq c \vee b \leq d$   
c)  $M = \{R, P, S\}, x \preceq y :\Leftrightarrow (x, y) \in X$ , wobei  $X := \{(R, R), (R, P), (P, P), (P, S), (S, S), (S, R)\}$ .

**Aufgabe 6** Sei  $(K, +, \cdot, \leq)$  ein geordneter Körper und  $a, b, c, d \in K$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen ohne Lemma 1.37 aus dem Skriptum zu verwenden.

- a)  $a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b - a$       c)  $a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$   
b)  $a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$       d)  $a \leq b \wedge c \leq 0 \Rightarrow bc \leq ac$

**Aufgabe 7** Finden Sie eine Relation  $\preceq$ , die den Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen zu einem geordneten Körper macht, oder zeigen Sie, dass so eine Relation nicht existiert. Elementare Eigenschaften von  $\mathbb{C}$ , und insbesondere der imaginären Einheit  $i$ , können ohne Beweis verwendet werden.

---

<sup>1</sup>sin ist die Sinusfunktion.