Übungen Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 12

Besprechung am **23. 1. 2020**

Aufgabe 1. Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung: Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbare Funktion, so ist f stetig in x_0.

Aufgabe 2. Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung: Seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b) und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f/g differenzierbar auf (a,b) und es gilt für $x \in (a,b)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = e^{\sin(x)} + \cos(x)$ b) $g(x) = \arccos(x)$ c) $h(x) = \tan(x)$

Aufgabe 4. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{x}{x-1}\right)$

Aufgabe 5. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - ne\right].$$

(Hinweis: Die Antwort ist nicht 0.)

Aufgabe 6. Sei $f\colon (a,b)\colon \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

a) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f streng monoton steigend (das heißt, für alle $x, y \in (a,b)$ mit $x < y$ gilt $f(x) < f(y)$).

b) Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f streng monoton fallend (das heißt, für alle $x, y \in (a,b)$ mit $x < y$ gilt $f(x) > f(y)$).

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 21x - 8$$

genau eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 8. Finden Sie eine Lösung für die Differentialgleichung

$$xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0 \qquad \text{mit} \quad f(0) = 1 \text{ und } f'(0) = 0.$$

a) Nehmen Sie (ohne Beweis) an, dass $f(x)$ durch eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dargestellt werden kann.

b) Setzen Sie die Darstellung in die Formel ein und berechnen Sie Werte für $a_0, a_1, \ldots$.