Übungsblatt 11

Besprechung am **16. 1. 2020**

Aufgabe 1. Finden Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^3}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

Aufgabe 2. Finden Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

Aufgabe 3. Finden Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n)^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} x^n$

Aufgabe 4. Finden Sie das multiplikative Inverse der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Aufgabe 5. Finden Sie das multiplikative Inverse der Potenzreihe $x^2 - 4x + 4$.

Aufgabe 6. Sei $f(x)$ gegeben durch die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius $r > 0$. Beweisen Sie:

a) Falls $f(x)$ eine gerade Funktion ist (das heißt, $f(x) = f(-x)$ für alle $|x| < r$), dann folgt $f_{2k+1} = 0$ für alle $k \geqslant 0$.

b) Falls $f(x)$ eine ungerade Funktion ist (das heißt, $f(x) = -f(-x)$ für alle $|x| < r$), dann folgt $f_{2k} = 0$ für alle $k \geqslant 0$.

Aufgabe 7. Berechnen Sie

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[2n-1]{e}}{\sqrt[2n]{e}} = \frac{e}{\sqrt{e}} \cdot \frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt[4]{e}} \cdot \frac{\sqrt[5]{e}}{\sqrt[6]{e}} \cdot \ldots .$$

(Hinweis: Transformieren Sie das Produkt in eine Summe.)

Aufgabe 8. Benutzen Sie die Potenzreihe für $1/(1-x-x^2)$ aus der Vorlesung um eine geschlossene Formel für die Fibonaccizahlen $F_0, F_1, \ldots$ herzuleiten:

a) Schreiben Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{A}{x-\varphi} + \frac{B}{x-\psi}$$

mittels einer Partialbruchzerlegung.

b) Benutzen Sie die Potenzreihe für $1/(1-x)$ um die rechte Seite oben in eine Potenzreihe umzuformen.

c) Vergleichen Sie die Koeffizienten.

(Optional: Bis zu welchem n können Sie mit Ihrer Formel und Gleitkommazahlen in doppelter Genauigkeit noch die korrekte Fibonaccizahl F_n angeben?)

Bonusaufgabe. Beweisen Sie die *Halbwinkelformel* mittels der Potenzreihendarstellung für $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R}: \quad \sin(\vartheta/2)^2 = \frac{1-\cos(\vartheta)}{2}.$$

(Hinweis: Sie können die Formel $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+2}{2k+1} = 2^{2k+1}$ ohne Beweis verwenden.)