Übungen Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 10

Besprechung am **9. 1. 2020**

Aufgabe 1. Wir nennen eine Funktion $f\colon M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ε-δ-*stetig* in $x \in M$ falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in M\colon |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Zeigen Sie: Jede stetige Funktion ist auch ε-δ-stetig.

Aufgabe 2. Zeigen Sie die Umkehrung zu Aufgabe 1: Jede ε-δ-stetige Funktion ist stetig.

Aufgabe 3. Seien $(a_n)_{n\geqslant 0}$ und $(b_n)_{n\geqslant 0}$ zwei Folgen reeller Zahlen mit $a_n \geqslant 0$ und $b_n > 0$ für alle $n \geqslant 0$. Weiterhin gelte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \qquad \text{wobei} \quad 0 < c < \infty.$$

Zeigen Sie: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Aufgabe 4. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos(n)}{n^{2/3} - 2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 1}\Big)^n$

Aufgabe 5. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n\sqrt{n}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^2 e^{-n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10} 10^n}{n!}$

Aufgabe 6. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/2)^n}{5^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^{n+1/2}}$

Aufgabe 7. Seien $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sei $k \geqslant 2$ eine natürliche Zahl, und sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Zeigen Sie, dass auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$ konvergiert.

Aufgabe 8. Seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien r_f und r_g. In Satz 6.5 Punkt 2 ist für $|x| < \min\{r_f, r_g\}$ das Produkt von $f(x)$ und $g(x)$ definiert als:

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}\Big) x^n.$$

Zeigen Sie:

a) Für $|x| < \min\{r_f, r_g\}$ gilt $f(x)g(x) = g(x)f(x)$.

b) Für $|x| < \min\{r_f, r_g, r_h\}$ gilt $f(x)\big(g(x)h(x)\big) = \big(f(x)g(x)\big)h(x)$, wobei $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$ eine weitere Potenzreihe mit Konvergenzradius r_h sei.