Übungen Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2019**
https://www.risc.jku.at/education/courses/ws2019/mathematik1/

Übungsblatt 8

Besprechung am **05.12.2019**

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass die angeführten Folgen konvergieren.

$$a)\ a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \qquad b)\ b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

Aufgabe 2 Wir bezeichnen, wie üblich, den Limes der Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ mit e.

a) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}$;

b) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.

Aufgabe 3 Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

> $\alpha \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$ genau dann, wenn jedes offenen Intervall (u,v) das α enthält, Folgenglieder a_n mit beliebig großem Index enthält.

Anleitung: Zu zeigen ist:

$$\exists \text{ streng monoton wachsende Folge } i_1 < i_2 < \cdots \text{ natürlicher Zahlen mit } \lim_{n\to\infty} a_{i_n} = \alpha$$
$$\iff \forall\, u, v \in \mathbb{R}\, \forall N \in \mathbb{N} \left(u < \alpha < v \Rightarrow \exists n \geq N \text{ mit } u < a_n < v\right)$$

Aufgabe 4 Dual zum Begriff des Supremums einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ bezeichnet das `Infimum` von $(a_n)_{n\geq 1}$ die größte untere Schranke: $S = \inf_{n\geq 1} a_n \iff$

a) $\forall n \in \mathbb{N}: S \leq a_n$ und

b) $\forall \widetilde{S} \left(\forall_{n\in\mathbb{N}}\, \widetilde{S} \leq a_n \Rightarrow \widetilde{S} \leq S\right)$.

Zeigen Sie, dass jede nach unten beschränkte Folge ein Infimum hat, und, dass dieses eindeutig ist.

Aufgabe 5 In der Vorlesung wird der Limes superior einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ definiert als

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n$$

Zeigen Sie, dass $\limsup_{k\to\infty} a_k = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$ gilt.

Aufgabe 6 Es seien f und g Funktionen $(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a,b)$. Zeigen Sie:

a) Wenn f und g beide stetig in x_0 sind, dann ist auch $f \cdot g$ (also die Funktion $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$) stetig in x_0.

b) Wenn f und g beide stetig in x_0 sind und $g(x_0) \neq 0$ gilt, dann ist die Funktion $f/g \colon x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig in x_0.

Aufgabe 7 Sei $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \dots\ x \neq 0 \\ 0 & \dots\ x = 0. \end{cases}$

Zeigen Sie: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(nx)$.