Übungen Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2019**
https://www.risc.jku.at/education/courses/ws2019/mathematik1/

Übungsblatt 7

Besprechung am **28.11.2019**

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} < 2$. Verwenden Sie diese Abschätzung, um den Beweis aus der Vorlesung über die Beschränktheit der Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ zu vervollständigen.

Aufgabe 2 Beweisen Sie den Satz, dass jede nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen ein Supremum hat.

> Anleitung: Sei T eine obere Schranke der Folge a_n. Setzen Sie $T_n = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Dann ist die Folge $(T_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und durch T oben beschränkt, somit konvergent. Es sei $T_0 = \lim_{n\to\infty} T_n$. Zeigen Sie, dass T_0 das gesuchte Supremum ist.

Aufgabe 3 Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch a_n gegen 0 konvergiert. Geben Sie ein Beispiel, das belegt, dass diese Aussage nicht gelten muss, wenn man die Zahl 0 durch eine Zahl $\neq 0$ ersetzt.

Aufgabe 4 Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, und $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Zeigen Sie, dass die dadurch bestimmte Teilfolge $\left(a_{i_n}\right)_{n\geq 1}$ konvergiert.

Aufgabe 5 Entscheiden Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren und berechnen Sie im affirmativen Fall den Grenzwert.

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2+1}{7n^3+n}, \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2+n+1}{3n^2+2} \qquad c)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.$$

> Anleitung zu c): Setzen Sie $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$, sodaß also $n = (1+a_n)^n$ gilt. Sodann schätzen Sie mit Hilfe der binomischen Formel geeignet ab.

Aufgabe 6 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{n\to\infty} \left((-1)^n 2^{-n} + \frac{n-1}{n}\right) \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{2n} + \frac{n}{n+2}\right) \qquad \lim_{n\to\infty} \left(n - \frac{n^2+n+1}{n}\right).$$

Aufgabe 7 Zeigen Sie: $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists q \in \mathbb{Q}\colon |x-q| < \varepsilon$ (Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$).