# Übungsblatt 6

Besprechung am **21.11.2019**

---

**Aufgabe 1** Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ einen Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n$. Beweisen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

**Aufgabe 2** Untersuchen Sie, ob diese Folgen für $n > 0$ konvergieren, und bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert:

a) $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}$ b) $b_n = \frac{n!}{2^n}$ c) $c_n = \frac{n!}{n^n}$ d) $d_n = 4n - \frac{(2n-1)^2}{n}$

**Aufgabe 3** Bestimmen Sie folgende Grezwerte, sofern sie existieren:

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2(n)}{2^n}$ c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$

**Aufgabe 4** Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Folgen konvergieren, und bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert:

a) $(x^n)_{n\geq 1}$ b) $\left(\left(-\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ c) $\left(\frac{x^n-1}{x^n+1}\right)_{n\geq 1}$

**Aufgabe 5** Vervollständigen Sie das Beispiel aus der Vorlesung, indem Sie zeigen die Folge

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$$

ist monoton wachsend.

**Aufgabe 6** Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

**Aufgabe 7** Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ sei gegeben durch die Rekursionsgleichung

$$x_0 = 3 \text{ und } x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right) \text{ für } n \geq 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\geq 0}$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist.
b) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n$.