Übungsblatt 5

Besprechung am **14.11.2019**

Aufgabe 1 Zeigen Sie für alle reelle Zahlen x (eine graphische Argumentation ist zulässig):

a) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

b) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

c) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Aufgabe 2 Berechnen Sie die exakten Werte (d.h. keine Gleitkommazahlen) von:

a) $\cos(\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}))$

b) $\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5}))$

c) $\tan(\frac{\pi}{2})$ (bzw. $\tan(90°)$)

d) $\cos(\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}))$

e) $\sin(\sin^{-1}(2))$

f) $\sin^{-1}(\sin(2))$

Aufgabe 3 Sei $c \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

Aufgabe 4 Seien $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ und $(c_n)_{n\geq 0}$ Folgen mit den Eigenschaften

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n \text{ und } \forall n \geq 0 : a_n \geq b_n \geq c_n.$$

Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Aufgabe 5 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte oder zeigen Sie, dass diese nicht existieren:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{sin(n)}{n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \pi$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(x)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$

Aufgabe 6 Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Beweisen Sie die folgende Aussage aus der Vorlesung:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

Aufgabe 7 Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Beweisen Sie die folgende Aussage aus der Vorlesung:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass sowohl $(a_n - a)b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ als auch $(b_n - b)a \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.