

Übungsblatt 4

Besprechung am 07.11.2019

Aufgabe 1 Es seien x und y beliebige reelle Zahlen. Zeigen Sie:

- a) $|x + y| \leq |x| + |y|$,
- b) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ abzählbar ist.

Aufgabe 3 Seien a und b berechenbare reelle Zahlen. Zeigen Sie unter der Verwendung von Definition 1.30 des Skripts, dass dann auch $a + b$ eine berechenbare reelle Zahl ist.

Aufgabe 4 Sei $f : A \rightarrow B$ eine bijektive Funktion. Zeigen Sie:

- a) f^{-1} ist ebenfalls bijektiv.
- b) $(f^{-1})^{-1} = f$.

Aufgabe 5 Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ zwei bijektive Funktionen. Wir definieren $h : A \rightarrow C$ durch $h(x) = g(f(x))$ (auch $h = g \circ f$ schreiben). Zeigen Sie:

- a) h ist bijektiv.
- b) $h^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x))$ für alle $x \in C$.

Aufgabe 6 Es seien $n > 0$ eine natürliche Zahl und $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ zwei endliche Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Aufgabe 7 Zeigen Sie den Satz von Pythagoras (Satz 2.3 im Skript). Eine graphische Argumentation ist zulässig.