Übungsblatt 3

Besprechung am **31.10.2019**

Aufgabe 1 Ist $K = \{a, b\}$ mit den Operationen "+" und "·" definiert durch

$$\begin{array}{c|cc} + & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & a \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & a & b \end{array}$$

ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 Überprüfen Sie, ob die folgenden Relationen (lineare) Ordnungsrelationen auf der Menge M sind.

a) $M = \mathbb{N}_0^2$, $(a, b) \preceq (c, d) :\Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$

b) $M = \mathbb{N}_0^2$, $(a, b) \preceq (c, d) :\Leftrightarrow a \leq c \vee b \leq d$

c) $M = \{R, P, S\}$, $x \preceq y :\Leftrightarrow (x, y) \in X$, wobei $X := \{(R, R), (R, P), (P, P), (P, S), (S, S), (S, R)\}$.

Aufgabe 3 Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper und $a, b, c, d \in K$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen ohne Lemma 1.23 aus dem Skriptum zu verwenden.

a) $a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b - a$

b) $a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$

c) $a \leq b \wedge 0 \leq c \Rightarrow a\,c \leq b\,c$

d) $a \leq b \wedge c \leq 0 \Rightarrow b\,c \leq a\,c$

Aufgabe 4 Wie die vorige Aufgabe.

a) $(a \leq b \wedge c \leq d) \Rightarrow a + c \leq b + d$ b) $0 \leq a^2$ c) $a < b \wedge 0 < c \Rightarrow a\,c < b\,c$

Aufgabe 5 Es sei $b > 0$. Beschreiben Sie die Menge all jener Zahlen $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, für die $\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$ gilt, als Vereinigung von Intervallen.

Aufgabe 6 Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung (Lemma 1.28 aus dem Skriptum): Für alle $x \in [-1, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(x + 1)^n \geq n\,x + 1$.

Aufgabe 7 Beweisen Sie die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel (Lemma 1.29 aus dem Skriptum): Für alle $a, b \in [0, \infty)$ gilt $\sqrt{a\,b} \leq \frac{a+b}{2}$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $a = b$.

Aufgabe 8 Finden Sie eine Relation $\preceq$, die den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen zu einem geordneten Körper macht, oder zeigen Sie, dass so eine Relation nicht existiert. Elementare Eigenschaften von $\mathbb{C}$, und insbesondere der imaginären Einheit i, können ohne Beweis verwendet werden.