Übungsblatt 2

Besprechung am **24.10.2019**

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen abzählbar ist.

Aufgabe 2 Welche der folgenden Funktionen sind injektiv/surjektiv/bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto 3x + 5$

b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$ [1]   c) $g : \{a, b\} \to \{a, b, c, d\},\ a \mapsto d,\ b \mapsto a$

Aufgabe 3 Welche der folgenden Funktionen sind injektiv/surjektiv/bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $f : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0,\ (a, b) \mapsto a + 2b$ b) $g : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^2+4}{x-2}$ c) $h : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^2-4}{x-2}$

Aufgabe 4 Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Wenn f und g injektiv sind, ist auch $g \circ f$ injektiv.

b) Wenn f und g surjektiv sind, ist auch $g \circ f$ surjektiv.

Hierbei ist wie üblich $g \circ f : A \to C$ mit $x \mapsto g(f(x))$.

Aufgabe 5 Zeigen Sie, dass die Umkehrung der Aussage in der vorigen Aufgabe *nicht* gilt. D. h. finden Sie Mengen A, B, C und Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$, sodass

a) $g \circ f$ injektiv ist, aber f oder g nicht injektiv ist.

b) $g \circ f$ surjektiv ist, aber f oder g nicht surjektiv ist.

Aufgabe 6 Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung: Jede rationale Zahl $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ lässt sich als endliche Dezimalzahl oder periodische Dezimalzahl darstellen; in letzterem Fall ist die Länge der Periode kleiner als n ($\overline{0}$ zählt nicht als Periode).
Hinweis: Wenden Sie Division mit Rest an. Um ein Gefühl für die Aufgabe zu bekommen, könnten Sie zunächst z. B. 1/6, 2/7, 47/56, 45/74 oder 17/28 berechnen.

Aufgabe 7 Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung: Jede periodische Dezimalzahl lässt sich als Bruch darstellen.
Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Summenformel $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} 10^{-a\,j} = \frac{1}{1 - 10^{-a}}$ für $a \in \mathbb{N}$.

---

[1] sin ist die Sinusfunktion.