Übungsblatt 1

Besprechung am **17.10.2019**

Aufgabe 1 Zeigen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzips[1]: Für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzips die folgende Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Aufgabe 3 Sei $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ and $n \in \mathbb{N}_0$. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mittels der üblichen Potenzrechenregeln:

a) $\dfrac{6^{-3}}{2^{-4}}$

b) $(3x)^n \cdot x^{-n}$

c) $\dfrac{(2x)^4}{(4x)^2 \cdot x}$

d) $\dfrac{(x^n - 1)^2}{x^n}$

e) $\dfrac{(x^{-n} \cdot (5x)^{-1})^{-3} \cdot x^{-n}}{x \cdot (x^{n+1})^2}$

Aufgabe 4 Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Beweisen Sie die folgenden Aussagen nur unter Verwendung der Körperaxiome aus dem Skriptum. Wenden Sie hierfür pro Schritt jeweils nur ein Axiom an.

a) 0 ist eindeutig bestimmt, d. h. für alle $0_1, 0_2 \in K$ gilt:

$$(\forall a \in K : a + 0_1 = a \wedge a + 0_2 = a) \Rightarrow 0_1 = 0_2.$$

b) Das additive Inverse ist eindeutig bestimmt, d. h. für alle $a, b, c \in K$ gilt

$$(a + b = 0 \wedge a + c = 0) \Rightarrow b = c.$$

c) Für alle $a \in K$ gilt: $a \cdot 0 = 0$.

Aufgabe 5 Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Beweisen Sie die folgenden Aussagen nur unter Verwendung der Körperaxiome sowie Satz 1.6 aus dem Skriptum.

a) Für alle $a, b \in K$ gilt: $-(a\,b) = (-a)\,b$.

b) Für alle $a, b \in K$ und $c, d \in K\backslash\{0\}$ gilt: $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{a\,d + b\,c}{c\,d}$.

Aufgabe 6 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei

$$\mathbb{K}[x] := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,|a_n \in \mathbb{K}, a_n = 0 \text{ für fast alle } n \right\}$$

---

[1] Zur Erinnerung: Das Induktionsprinzip besagt, dass eine beliebige Aussage $\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, falls $\varphi(0)$ gilt und falls $\varphi(n+1)$ unter der Annahme $\varphi(n)$ gilt. Formal: $\varphi(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 : (\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : \varphi(n)$.

die Menge der Polynome über dem Körper $\mathbb{K}$.[2]
Die Addition wird komponentweise definiert durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

und die Multiplikation wird definiert durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

mit $c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.
Zeigen Sie: Die Multiplikation ist sowohl assoziativ als auch kommutativ.
Warum ist $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ kein Körper?

Aufgabe 7 Zeigen Sie $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

[2]Zur Erinnerung: *fast alle* bedeutet *alle bis auf endlich viele*. Formal bedeutet die Aussage hier: $\exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n > N : a_n = 0$.