Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
9. Übungsblatt für den 16. 12. 2019

45. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ sei

$$W_n = \left\{ p \,\middle|\, p \in \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}),\ \int_0^1 dx\, p(x) = 0 \right\}$$

   (a) Bildet W_n einen Unterraum von $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$?
   (b) Geben Sie eine Basis von W_n an.

46. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und V^* der dazu duale Vektorraum mit der zu B dualen Basis $B^* = \{\beta^1, \ldots, \beta^n\}$. Ein $v \in V$ wird durch B dargestellt als $v = \sum_{i=1}^n \lambda^i b_i$ und $\phi \in V^*$ als $\phi = \sum_{i=1}^n \mu_i \beta^i$.

   Zeige: $\lambda^i = \beta^i(v)$ und $\mu_i = \phi(b_i)$

47. Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ seien die kanonische Basis B_1 und noch eine weitere Basis $B_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit den Basiselementen $b_1 = (1,1,0)$, $b_2 = (1,0,1)$ und $b_3 = (0,1,1)$ gegeben.

   (a) Im dualen Vektorraum V^* erhalten wir die zu B_1 duale Basis B_1^* und die zu B_2 duale Basis B_2^*. Bestimme die Koordinaten von B_2^* bezüglich B_1^*.
   (b) Stelle, mithilfe von B_2^* und unter Verwendung von Bsp. 46, den Vektor $v = (1,0,0)$ in der Basis B_2 dar.

   Bemerkung: in der Festkörperphysik heisst die duale Basis auch reziproke Basis.

48. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung, für die gilt:

$$(1,0,0) \to (1,0,1,1)\ , \qquad (0,1,0) \to (0,1,1,1)\ , \qquad (0,0,1) \to (1,-1,0,0)$$

   (a) Ist f durch diese Angaben eindeutig bestimmt?
   (b) Bestimme die Dimension von $\mathrm{Im}(f)$, eine Basis von $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Bestimme den Faktorraum $\mathbb{R}^4/\mathrm{Im}(f)$ und eine Basis von $\mathbb{R}^4/\mathrm{Im}(f)$.
   (d) Sei $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}$. Bestimme die Dimension von U. Bestimme $f(U)$ und die Dimension von $f(U)$ sowie eine Basis von $f(U)$.
   (e) Ist f ein Monomorphismus?

49. Eine lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ist definiert als

$$(x,y,u,v) \mapsto h(x,y,u,v) = (x + 2y - u + 2v\ ,\ 2x + 3y - 2u\ ,\ 3x + 5y - 3u + 2v)$$

   (a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $\mathcal{A}(h, B^0, C^0)$ von h bezüglich der jeweiligen kanonischen Basis B^0 und C^0 von $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^3$
   (b) Bestimmen Sie, ausgehend von (a), Basistransformationen von B^0 auf einen neue Basis B und von C^0 auf einen neue Basis C, sodass die Matrixdarstellung $\mathcal{A}(h, B, C)$ Normalform hat (also nur 0 oder 1 in der Diagonale, und 0 sonst).
   Hinweis: Darstellungsmatrizen transformieren bei Basistransformationen von B_1 nache B_2 und von C_1 nach C_2 mit Satz 3.3.35: $\mathcal{A}(h, B_2, C_2) = \mathcal{A}_{C_2}^{C_1} \cdot \mathcal{A}(h, B_2, C_2) \cdot \mathcal{A}_{B_1}^{B_2}$

50. Es seien A und B ähnliche Matrizen. Wir definieren die Exponentialmatrix von A (genauso von B) als

$$\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

   Zeigen Sie, dass auch $\exp(A)$ und $\exp(B)$ ähnliche Matrizen sind.