Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
8. Übungsblatt für den 9. 12. 2019

39. (a) Berechnen Sie in Abhängigkeit des Wertes $a \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(b) Ist das Gleichungssystem $Ax = b_i$ mit $a = 1$ und $b_1 = (1, 1, 1)^T$ bzw. $b_2 = (1, 1, 3/4)^T$ konsistent? Berechnen Sie jeweils die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ und zeichnen Sie diese.

40. Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

invertierbare Matrizen P und Q so, dass $P\,A\,Q$ die Normalform von A ergibt. Ist A selbst invertierbar?

41. (a) Wenden Sie das Newton-Verfahren auf $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

und

$$f_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

für allgemeine Startwerte $x^{(0)} = (x_0, y_0)^T$ an, um eine Iterationsvorschrift für $x^{(m+1)}$ zu erhalten.

(b) Was beobachten Sie jeweils nach zwei Iterationsschritten bei der Wahl $(x_0, y_0) = (3/4, 5/6)$? Stellen Sie eine Vermutung an, wie sich bei weiterer Iteration die Approximation zur exakten Nullstelle verhalten würde.

42. Der Homomorphiesatz für lineare Abbildungen (Satz 3.3.11) lautet:
Ist $f : V \to W$ linear, dann gilt

$$V = \mathrm{kern}(f) \cong \mathrm{im}(f).$$

Beweisen Sie diesen Satz indem Sie zeigen, dass

$$i : V = \mathrm{kern}(f) \to \mathrm{im}(f),\ \ v + \mathrm{kern}(f) \mapsto f(v)$$

wohldefiniert und der gesuchte Isomorphismus ist.

43. Sei $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Dann ist der Differentialoperator

$$d : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), f(x) \mapsto f'(x)$$

ein Endomorphismus.

(a) Berechnen Sie $\ker(\frac{d}{dx})$.

(b) Wenden Sie den Homomorphiesatz an und geben Sie explizit den dadurch vorhergesagten Isomorphismus an.

(c) Geben Sie auch den inversen Isomorphismus explizit an.

44. Sei W der von den Funktionen $b_0(x) := 1, b_1(x) := x, b_2 := x^2$ aufgespannte Teilraum von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ und d wie in 43.

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{b_0, b_1, b_2\}$ eine Basis von W bildet.

(b) Zeigen Sie $d(W) \subset W$.

(c) Berechnen Sie $\mathcal{A}(d, B, B)$.