Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
7. Übungsblatt für den 2. 12. 2019

33. (Übungsgruppe Zillich)

34. (Übungsgruppe Zillich)

35. $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ ist der Körper der ganzen Zahlen modulo 5. Die Elemente aus $\mathbb{Z}_5$ werden üblicherweise mit einem Querstrich gekennzeichnet, $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Z.B. gilt $\bar{4} + \bar{2} = \bar{1}$ oder $\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{2}$.

    Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}_5$:

    (a)
    $$\begin{array}{rcrcrl} \bar{2}x & + & \bar{3}y & + & z & = \bar{2} \\ x & + & \bar{2}y & + & \bar{3}z & = \bar{0} \\ \bar{4}x & + & \bar{3}y & + & z & = \bar{1} \end{array}$$

    (b)
    $$\begin{array}{rcrcrl} x & + & \bar{3}y & + & \bar{2}z & = \bar{2} \\ \bar{3}x & + & \bar{2}y & + & z & = \bar{2} \end{array}$$

36. $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ist der Vektorraum der 2×2 Matrizen über dem Körper der komplexen Zahlen. Die Teilmenge B besteht aus folgenden 4 Matrizen:

    $$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

    (a) Zeige, dass B eine Basis von $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ist.

    (b) Der Kommutator von 2 Matrizen $A_1, A_2 \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ist definiert als

    $$[A_1, A_2] := A_1 \cdot A_2 - A_2 \cdot A_1.$$

    Zeige, dass der Kommutator von 2 Matrizen aus der Basis B proportional zu einem Element aus B oder die Nullmatrix ist.

    (c) *Freiwilliger Bonuspunkt:* Zeige, dass für einen beliebigen Ring R der Kommutator

    $$[.,.] : R \times R \to R, (a, b) \mapsto ab - ba$$

    linear in beiden Komponenten ist und die beiden Identitäten

    $$[a, b] = -[b, a]$$

    und

    $$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$$

    erfüllt sind.

37. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

    (a) Zeigen Sie: falls $I_n - A$ invertierbar ist, lässt sich die Inverse formal als Reihe schreiben

    $$(I_n - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

    sofern diese Reihe konvergiert.

    (b) Testen Sie (a) mit folgenden Matrizen, indem sie $I_n - A$ invertieren wie im Skriptum (siehe Beispiel 2.3.7) und das Ergebnis mit der Reihe aus (a) vergleichen:

    $$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(iii)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

38. Sei V der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ ($n \geq 3$). Welche der Teilmengen $T_i \subseteq \mathbb{R}^n$ sind Unterräume von $\mathbb{R}^n$?

$$T_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 < 0\}$$
$$T_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 \cdot x_2 = 0\}$$
$$T_3 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 \in \mathbb{Q}\}$$
$$T_4 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_2 = x_1^2\}$$
$$T_5 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i = x_{i+2}, i = 1, \ldots, n-2\}$$
$$T_6 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + 2x_3 = 2\}$$