# Übungen zu
# Lineare Algebra für Physiker(innen)
## 6. Übungsblatt für den 18. 11. 2019

28. (Übungsgruppe Zillich)

29. Bildet $(Mat_{2\times 2}(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ einen kommutativen Ring mit Einselement? Gibt es in dieser algebraischen Struktur Nullteiler?

30. Zeigen Sie (ii) und (iii) aus Satz 2.1.23: Für Matrizen $A, B, C$ gilt, falls definiert,
    (a) $(A(B+C))^T = B^T A^T + C^T A^T$
    (b) $(A^n)^T = (A^T)^n$ für alle $n \in N$.

31. Sei
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
    (a) Zerlegen Sie die Matrix in die Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix.
    (b) Berechnen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Matrix $A^n$ und beweisen Sie die Formel per Induktion.

32. (a) Wie sieht die Rotationsmatrix der Rotation $r$ aus, welche den Punkt $P = (0, 1)$ in den Punkt $Q = (1/2, \sqrt{3}/2)$ transformiert, also für welche gilt $r(P) = Q$?
    (b) Bestimmen Sie $r(\sqrt{3}, 3)$.
    (c) Ist $r$ eine lineare Funktion auf $\mathbb{R}^2$?

33. Zeigen Sie, dass die Menge $O(n)$ der orthogonalen $n \times n$ Matrizen eine Untergruppe von $(Mat_{n\times n}, \cdot)$ bildet.

34. Bestimmen Sie die Elementarmatrizen, die $A_i$ in $A_{i+1}$ überführen für $i \in \{1, \ldots, 6\}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & -6 & -18 \end{bmatrix}, \quad A_7 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix},$$