Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
5. Übungsblatt für den 11. 11. 2019

23. (Übungsgruppe Zillich)

24. (Übungsgruppe Zillich)

25. (beide Übungsgruppen)

26. Seien A, B, C, D Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$, und $h : C \to D$ Funktionen darauf. Zeige mit der in der Vorlesung definierten Hintereinanderausführung $\circ$:

    (a) Assoziativität: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

    (b) Sind f und g injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv.

    (c) Zu f gibt es genau dann eine inverse Funktion, wenn f bijektiv ist, und diese inverse Funktion (mit f^{-1} bezeichnet) ist eindeutig.

27. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck in einer Ebene. Im allgemeinen wird das Dreieck anders in der Ebene liegen, wenn man es dreht oder an einer beliebigen Geraden spiegelt.

    (a) Stellen Sie eine Liste aller Symmetrieoperationen des gleichseitigen Dreiecks auf, also all jener Drehungen und Spiegelungen, bezüglich derer das Dreieck *invariant* ist. Zeigen Sie dass diese Symmetrieoperationen eine Gruppe bilden. Ist diese Gruppe abelsch? Zyklisch?

    (b) Finden Sie die Untergruppen der Gruppe aus (a). Ist die Gruppe der Symmetrieoperationen eines gleichschenkeligen Dreiecks eine Untergruppe?

28. Sei $A_n := \{e^{2\pi ik/n} | k = 0, 1, \ldots, n-1\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

    (a) Zeige dass A_n zusammen mit der Multiplikation eine abelsche Gruppe $(A_n, \cdot)$ bildet. Ist sie auch zyklisch?

    (b) Sei n ein Teiler von m. Zeige dass dann $(A_n, \cdot)$ eine Untergruppe von $(A_m, \cdot)$ ist. Ist $(A_n, \cdot)$ ein Normalteiler von $(A_m, \cdot)$?

    (c) Beschreibe die Faktorgruppe von A_m nach A_n.