Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
4. Übungsblatt für den 04. 11. 2019

20. Bestimmen Sie die Faktormenge und ein Repräsentantensystem für jede der Äquivalenzrelationen des Beispiels 19.

21. Beweisen Sie die folgende Aussagen (Satz 1.4.21 und 1.4.22) für eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge A und $a, b \in A$:

    (a) $a \sim b \Leftrightarrow K_\sim(a) = K_\sim(b)$.

    (b) $a \nsim b \Leftrightarrow K_\sim(a) \cap K_\sim(b) = \emptyset$.

    (c) $\bigcup_{a \in A} K_\sim(a) = A$.

    (d) Sei $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ eine Partition von A. Dann ist die Relation $\sim$ mit

    $$a \sim b :\Leftrightarrow \exists i \in I : a, b \in A_i$$

    eine Äquivalenzrelation auf A.

    Aus (ii) und (iii) folgt direkt, dass die Äquivalenzklassen eine Partiton von A bilden. Punkt (iv) hingegen zeigt, dass man mithilfe jeder Partition auch eine Äquivalenzrelation definieren kann.

22. (a) Es seien X, Y Mengen, und $f : X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass

    $$x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

    eine Äquivalenzrelation auf X darstellt.

    (b) Zeigen Sie, dass

    $$F : X_\sim \to f(X),\ K_\sim(x) \mapsto f(x)$$

    eine bijektive Funktion beschreibt. Zeigen Sie insbesondere, dass F funktional ist.

23. Sei A eine Menge und $\mathcal{P}(A)$ ihre Potenzmenge.

    (a) Welche Eigenschaften (funktional, reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv,) erfüllt folgende Relation auf $\mathcal{P}(A)$

    $$XRY :\Leftrightarrow X \subset Y?$$

    (b) Geben Sie eine lineare und eine nicht-lineare Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(A)$ an. Finden Sie dafür, falls vorhanden, ein kleinstes und ein maximales Element. Sie können dazu annehmen, dass A selbst linear geordnet ist.

24. (a) Sei A eine endliche Menge und $f : A \to A$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass

    $$f \text{ bijektiv } \Leftrightarrow f \text{ injektiv.}$$

    (b) Gilt obige Behauptung auch für unendliche Mengen A? Finden Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

25. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ und $F(X; X)$ die Menge der Abbildungen von X nach X ausgestattet mit der Verknüpfung $*$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $(F(X; X), *)$ mit

    (a) $(f * g)(x) = f(x) + g(x)$

    (b) $(f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

    (c) $(f * g)(x) = f(g(x))$

    eine Gruppe bildet. In den negativen Fällen: Gibt es eine Teilmenge $G(X; X) \subseteq F(X; X)$, sodass $(G(X; X), *)$ eine Gruppe bildet?