Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
3. Übungsblatt für den 28. 10. 2019

15. "Sieb des Eratosthenes":
Mit folgender Vorschrift kann man bequem alle Primzahlen bis n bestimmen:

(i) lege eine Tabelle T aller natürlichen Zahlen bis n an, beginnend mit der kleinsten Primzahl $p = 2$;
(ii) eliminiere in T alle durch p teilbaren Zahlen;
(iii) gehe zur nächsten Zahl p der (jetzt kleineren) Tabelle – falls es kein weiteres p gibt, sind wir fertig;
(iv) gehe zu (ii).

Mithilfe dieser Sieb-Methode kann man z.b. die Anzahl der Primzahlen bis n, $\pi(n)$, berechnen.

(a) Probieren Sie dieses Sieb für nicht zu grosses n aus.

(b) *Freiwilliger Bonuspunkt:* Implementieren Sie das Sieb als Computerprogramm. Berechnen Sie damit $\pi(n)$ numerisch und verifizieren Sie numerisch, dass $\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n - 1}$.

(c) Das asymptotische Verhalten von $\pi(n)$ kann auch streng bewiesen werden (zu kompliziert für einen Übungszettel). Dazu benötigt man die Riemannschen Zeta Funktion $\zeta(z)$ $(z \in \mathbb{C})$, die auch in der Physik wichtig ist (z.b. zur Berechnung der kritischen Temperatur für Bose-Einstein Kondensation) $\zeta(z)$ kann für $\Re e[z] > 1$ definiert werden durch

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z} \tag{1}$$

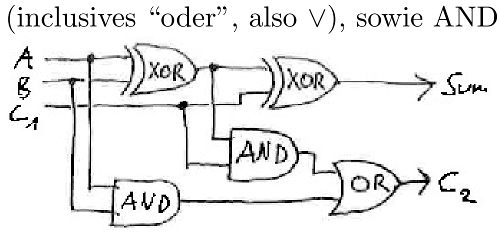
$\zeta(z)$ hat eine interessante Verbindung zu den Primzahlen P:
Zeigen Sie, dass sich $\zeta(z)$ auch als folgendes Produkt schreiben lassen kann

$$\zeta(z) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

Inspiriert vom obigen Sieb, gehen Sie folgendermassen vor: dividiere Gl.(1) durch $x = 2^z$ und subtrahiere das Ergebnis von Gl.(1). Welche Terme werden dabei eliminiert? Wiederhole mit $x = 3^z$ usw., und nimm an, dass diese Vorschrift konvergiert.

(d) *Jahrtausend-Bonuspunkt:* Zeigen Sie, dass komplexe Nullstellen von $\zeta(z)$ einen Realteil $\frac{1}{2}$ haben (Sie erhalten dafür \$$10^6$).
`https://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis`

16. Gegeben ist folgende binäre Schaltung, bestehend aus den gates XOR (exclusives "oder" im Sinn von "entweder-oder"), OR (inclusives "oder", also $\vee$), sowie AND ("und", also $\wedge$):



Dabei sind A, B, und C_1 logische inputs (d.h. A$\in \{\text{true}, \text{false}\}$ bzw. A$\in \{0, 1\}$ usw) und Sum und C_2 logische outputs.

(a) Zeigen Sie mit einer Wahrheitstabelle, das diese Schaltung die binäre Addition (Sum) vom A und B ausführt, mit einem Übertrag C_2. C_1 ist ein möglicher Übertrag von einer vorherigen Addition.

(b) Wie könnte man mehrere dieser Schaltungen kombinieren, um natürliche Zahlen (in Binärdarstellung) grösser als 1 zu addieren?

17. Beweisen Sie folgende Regeln für Mengenoperationen:

    (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
    (c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
    (d) $A \Delta A = \emptyset$ und $A \Delta \emptyset = A$ und $A \Delta U = \bar{A}$

18. Sei U das "Universium", und $\mathcal{P}(U)$ die Potenzmenge von U. Zeige:

$$\forall A \in \mathcal{P}(U) : \exists! B \in \mathcal{P}(U) : A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = U$$

    $\exists!$ bedeutet "es existiert *genau ein*". Es ist also die Eindeutigkeit zu zeigen.

19. Welche der folgenden Relationen R_i auf Mengen A_i sind Äquivalenzrelationen?

    (a) $A_1 = \mathbb{R}$ mit der Relation $R_1 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} \wedge [x] = [y]\}$, wobei $[.]$ das Abrunden auf ganze Zahlen bezeichnet.
    (b) $A_2 = \mathbb{R}$ mit der Relation $R_2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} \wedge x \leq y\}$.
    (c) $A_3 = \mathbb{Z}$ mit der Relation $R_3 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z} \wedge (3 | (x - y))\}$ (Gleichheit modulo 3).
    (d) $A_4 = \{(x, y) | x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\}$ mit der Relation $(x, y) R_4 (x', y') :\Longleftrightarrow xy' = yx'$.