

**Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
2. Übungsblatt für den 21. 10. 2019**

9. Zeigen Sie die folgenden Aussagen über die Teilbarkeitsrelation ganzer Zahlen (Skriptum, Satz 1.2.6):

- (a) $k|m \wedge k|n \Rightarrow k|m+n \wedge k|m-n$;
- (b) $k|m \Rightarrow k|mn$;
- (c) $k|m \wedge m|k \Rightarrow k = \pm m$;
- (d) $k|m \wedge m|n \Rightarrow k|n$.

10. In einer Pizzeria kostet eine Pizza Diabolo 9 und eine Pizza Mafioso 12 Euro. Wie viele Pizzen kann man um 93 Euro kaufen, ohne Restgeld zurück zu bekommen? Ist die Lösung eindeutig?

11. Sei P die Menge der Primzahlen und $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a, b > 1$ und Primfaktorenzerlegung

$$a = \prod_{p \in P} p^{e_p} \quad \text{und} \quad b = \prod_{p \in P} p^{f_p}.$$

Zeigen Sie, dass

- (a) $ggT(a, b) = \prod_{p \in P} p^{\min(e_p, f_p)}$.
- (b) $kgV(a, b) = \prod_{p \in P} p^{\max(e_p, f_p)}$.

12. Zeigen Sie, dass die Wurzel einer jeden Primzahl irrational ist. Woran scheidet der Beweis bei beliebiger natürlicher Zahlen?

13. (a) Zeigen Sie die Richtigkeit des Widerspruchsbeweises mithilfe einer Wahrheitstabelle, also $(\neg P) \implies (Q \wedge \neg Q) \equiv P$.

(b) Drücken Sie $P \wedge Q$ bzw. $P \implies Q$ nur mithilfe von P, Q und den Junktoren \vee, \neg aus.

(c) Vereinfachen Sie folgende logische Beziehungen soweit als möglich

$$\neg(\exists a \in A \forall b \in A : P(a, b) \implies Q(a, b))$$

Ermitteln Sie den Wahrheitswert der Aussage für die Interpretation A als \mathbb{N} , $P(a, b)$ als $a | b$ und $Q(a, b)$ als $a < b$.

14. Sei $P(a, b)$ eine Aussage über Elemente $a \in A$ und $b \in B$ mit Mengen A, B . Zeigen oder widerlegen Sie

- (a) $\exists a \in A \forall b \in B : P(a, b) \implies \forall b \in B \exists a \in A : P(a, b)$.
- (b) $\forall a \in A \exists b \in B : P(a, b) \implies \exists b \in B \forall a \in A : P(a, b)$.