Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
11. Übungsblatt für den 20. 01. 2020

56. In der Quantenmechanik werden Sie den Zeitentwicklungsoperator $\exp[-itH]$ kennenlernen, wobei $t \in \mathbb{R}$ die Zeit und H eine lineare Abbildung, bzw. in einer Basisdarstellung eine Matrix ist. In sehr einfachen Fällen kann $\exp[-itH]$ ausgerechnet werden.

    Sei $H = \sigma_x$ die Pauli-Spinmatrix
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von σ_x.

    (b) Berechnen Sie $\exp[-it\sigma_x]$.

57. Wir wollen das folgende gekoppelte System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit den gegebenen Anfangsbedingungen lösen:
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -6 & 7 & -4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
    wobei wir abkürzen $\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt}$. Gehen Sie folgendermassen vor:

    (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und -vektoren von A.

    (b) Diagonalisieren Sie die Matrix A, d.h. bringen Sie A in die Form $A = PDP^{-1}$, wobei D eine Diagonalmatrix ist.

    (c) Lösen Sie das obige Differentialsgleichungssystem und geben Sie die Lösung $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ an.

58. Sei V ein IP-Raum und $h : V \to V$ eine lineare Abbildung. h heisst selbstadjungiert genau dann, wenn gilt: $\forall x, y \in V : \langle x|h(y)\rangle = \langle h(x)|y\rangle$. Sei nun V der Vektorraum $\mathbb{C}_n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt (Beispiel 5.1.3 im Skriptum) und der kanonischen Basis B. Zeigen Sie dass für die Elemente a_{ij} der Darstellungsmatrix $A \equiv A(h; B, B)$ einer selbstadjungierten linearen Abbildung h folgendes gilt:
$$\overline{a_{ij}} = a_{ji}$$
    wobei $\overline{z}$ komplex conjugiert bedeutet.

59. Anwendung der Cauchy-Schwartz Ungleichung: Heisenbergsche Unschärferelation
    Wir betrachten einen Vektorraum V über $\mathbb{C}$ mit einem Skalarprodukt. Seien A und B selbstadjungierte lineare Abbildungen:
$$\begin{aligned} A : &V \to V \\ &x \mapsto A(x) =: Ax \end{aligned}$$
    und analog für B.

    (a) Zeigen Sie dass für $x \in V$ gilt
$$\Im m\langle Ax|Bx\rangle = \frac{1}{2i}\left(\langle Ax|Bx\rangle - \langle Bx|Ax\rangle\right)$$
    wobei $\Im m\, z$ der Imaginärteil von einem komplexen z ist.

(b) Zwischen den beiden Abbildungen A und B gelte nun folgende Kommutatorrelation: $[A, B] = \frac{\alpha}{i} I$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ und I die $n \times n$ Einheitsmatrix ist, und $[A, B] := AB - BA$ (AB ist einfach die Hintereinanderausführung von A und B). Zeigen Sie mit (a), dass für ein $x \in V$ dann folgt:

$$\Im m\langle Ax|Bx\rangle = \frac{1}{2}\alpha||x||^2.$$

Wie betrachten ab jetzt nur noch normierte x, d.h. $||x|| = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\alpha}{2} \leq ||Ax||\,||Bx||$$

(c) Im letzten Schritt ersetzen wir in der obigen Herleitung A durch $A' = A - aI$ und B durch $B' = B - bI$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Sind die Voraussetzungen der obigen Herleitungen erfüllt? Zeigen Sie, dass auch $\frac{\alpha}{2} \leq ||A'x||\,||B'x||$ gilt.
Wenn wir nun speziell $a = \langle x|Ax\rangle$ und $b = \langle x|Bx\rangle$ setzen, erhalten wir eine Ungleichung, die *Heisenbergsche Unschärferelation* genannt wird:

$$\frac{\alpha}{2} \leq ||Ax - \langle x|Ax\rangle x||\,||Bx - \langle x|Bx\rangle x||$$

$||Ax - \langle x|Ax\rangle x||$ kann auch umgeschrieben werden in $(\langle x|A^2x\rangle - \langle x|Ax\rangle^2)^{1/2}$ und wird üblicherweise mit ΔA abgekürzt wird ("Unschärfe").

60. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, eine Matrix die $a \in \mathbb{R}$ als Einträge in der Diagonalen und 1 in der oberen Nebendiagonalen hat, also:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

Ist A diagonalisierbar?