Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
10. Übungsblatt für den 13. 01. 2020

49. (Übungsgruppe Zillich)

50. (Übungsgruppe Zillich)

8. Sei $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $sign(\tau), \tau^{-1}$ und verifizieren Sie damit Satz 4.1.10.
Bonus: Zeigen Sie, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$\{\sigma \in P_n \mid sign(\sigma) = 1\}$$

eine Untergruppe von P_n bildet. Gilt das auch, falls wir $sign(\sigma) = -1$ fordern?

51. Sei $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $A^T = -A$. Zeigen Sie, dass für ungerades $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\det(A) = 0.$$

Gilt diese Aussage auch für gerade $n \in \mathbb{N}$?

52. Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Berechnen Sie zuerste $\det(A \cdot A^T)$.

53. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Siein dem Gleichungssystem

$$A \cdot (x_1, x_2, x_3)^T = (-1, 3, -3)^T$$

x_3 mit Hilfe der Cramerschen Regel.
Bonus: Berechnen Sie A^{-1} mit Satz 4.1.22.

54. (a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume von

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gib die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte an.
(b) Welcher geometrischen Operation entspricht die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto A \cdot x$?

55. Es sei v ein Eigenvektor einer quadratischen Matrix A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie
(a) v ist ein Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert λ^2.
(b) Ist A invertierbar, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.
(c) (Bonus:) $\sigma(A) = \{0\}$ genau dann wenn A nilpotent ist, also, es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $A^m = 0$.