Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
1. Übungsblatt für den 14. 10. 2019

1. Zeigen Sie ausschließlich mit den Peano-Axiomen, Definition 1.2.1 und den im Anschluss daran bewiesenen Sätzen im Skriptum, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : n + n \text{ ist gerade.}$$

   Als Definition von *gerade* verwenden Sie die beiden Eigenschaften

   - 0 ist gerade.
   - Wenn n gerade ist, dann auch $S(S(n))$.

2. Benutzen Sie die Peano Axiome und zeigen Sie mittels Induktion oder direkt

   (a) $\forall n \in \mathbb{N} : n \neq S(n)$.

   (b) $\forall n, k \in \mathbb{N} : n \neq 0 \Rightarrow n + k \neq 0$.

   (c) $\forall n, k \in \mathbb{N} : n + k = 0 \Rightarrow n = 0 \wedge k = 0$.

   (d) $\forall n, l, m \in \mathbb{N} : n + l = n + m \Rightarrow l = m$

3. Zeigen Sie mittels Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$$

4. (a) Es seien a, b beliebige Zahlen. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ den binomischen Lehrsatz

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

   (b) Beweisen Sie, dass $n^5 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar ist.

5. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Bernoulli'sche Ungleichung

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

   wobei für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x \neq 0$ und $x > -1$.

6. Zeigen Sie mithilfe eines Widerspruchbeweises den "Satz von Eudoxos und Archimedes":

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$$

7. (a) Beweisen Sie für alle $n \in N$ und $x \neq 1$ die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

(b) Berechnen Sie für alle $n \in N$ und $x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k$$

mithilfe von (7a).
Hinweis: geeignetes Differenzieren.

(c) In der Festkörperphysik werden Ihnen oft folgende Summen begegnen:

$$S(m, L) = \sum_{k=0}^{L-1} e^{2\pi ikm/L},$$

wobei m und L natürliche Zahlen sind. Berechnen Sie $S(m, L)$ mithilfe von (7a).