Name: ....

Matr.Nr.: ....

Stud.Kennz.: ....

Klausur
"Lineare Algebra für Physiker(innen)" (326.017)
28.9.2020

Bitte folgendes beachten:

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

Alle Antworten sind zu begründen; ein simples "ja/nein" reicht nicht.

(1) Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen n:

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} .$$

(2) Geben Sie eine injektive Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ an.
Begründen Sie die Injektivität mittels der in der Vorlesung besprochenen Eigenschaften natürlicher Zahlen.
Welche Eigenschaft muss eine Funktion f noch haben, um zu begründen, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^2$ gleichmächtig sind?

(3) Die Tschebyschev-Polynome $T_n(x)$ sind wie folgt definiert:

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x, \quad \text{und} \quad T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ für } n \geq 1.$$

(a) Bestimmen Sie $T_2(x)$ und $T_3(x)$.
(b) Zeigen Sie: $B = \{T_0, T_1, T_2, T_3\}$ ist eine Basis für den Vektorraum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ der Polynome vom Grad ≤ 3 mit reellen Koeffizienten.
(c) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrizen zwischen den Basen $B = \{T_0, T_1, T_2, T_3\}$ und $C = \{1, x, x^2, x^3\}$ des reellen Vektorraums $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.

! umblättern !

(4) Wir betrachten die reellen Vektorräume $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$.
   (a) Geben Sie eine Basis B für $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, also den Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W, an.
   (b) Stellen Sie die lineare Abbildung

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + z, y - z) \end{array}$$

   als Linearkombination der Basiselemente in B dar.

(5) Sei $V = C([0, 1], \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum der stetigen Funktionen von $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$. Auf $V \times V$ betrachten wir die Abbildung

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f g \, dx.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\langle .|.\rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist.
   Gilt das auch, falls auch nicht-stetige Funktionen zugelassen werden?
   (b) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis für den Teilraum $W = \mathrm{span}(1, x, x^2)$.