

Name:

Matr.Nr.:

Stud.Kennz.:

Klausur
“Lineare Algebra für Physiker(innen)” (326.017)
 28.1.2020

Bitte folgendes beachten:

- Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.
- Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen – auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.
- Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.

Alle Antworten sind zu begründen; ein simples “ja/nein” reicht nicht.

- (1) Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen inneren Produkt. Sei W der Teilraum $\text{span}(w_1, w_2, w_3)$, mit

$$w_1 = (0, 1, 0, 1), \quad w_2 = (-1, 0, 1, 0), \quad w_3 = (1, 1, 0, 1).$$

- (a) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ für den Teilraum W .
 (b) Berechnen Sie zu $u = (1, 1, 1, 1)$ die beste Approximation (Fourier-Approximation) in W .

- (2) Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diejenige lineare Abbildung, für welche gilt

$$f(\underbrace{1, 1, 1}_{b_1}) = (2, 1), \quad f(\underbrace{0, 1, 1}_{b_2}) = (1, 0), \quad f(\underbrace{1, 0, 1}_{b_3}) = (1, 1).$$

Dabei ist $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von \mathbb{R}^3 . C sei die kanonische Basis von \mathbb{R}^2 .

- (a) Berechnen Sie $f(-1, 0, 1)$.
 (b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{A}(f, B, C)$ von f bzgl. B und C .
 Prüfen Sie das Resultat in (a) nach mittels $\mathcal{A}(f, B, C)$.

! umblättern !

- (3) Wir betrachten lineare Gleichungssysteme über \mathbb{R} .
- (a) Geben Sie ein homogenes lineares Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ in 3 Variablen an, dessen Lösungsraum die Dimension 1 hat.
 - (b) Geben Sie einen Vektor b an, sodass $A \cdot x = b$ lösbar ist, und einen Vektor b' , sodass $A \cdot x = b'$ unlösbar ist.
- (4) Wir betrachten $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{R} . Seien P und Q reguläre Matrizen. Betrachten Sie die unten stehenden Relationen \sim_a, \sim_b, \sim_c . Weisen Sie für eine dieser Relationen nach, dass sie eine Äquivalenzrelation ist; und beschreiben Sie für jede dieser Relationen die Eigenschaften von A und B , welche unter dieser Äquivalenzrelation gleich bleiben.
- (a) $A \sim_a B$ genau dann, wenn $B = Q \cdot A \cdot P$
 - (b) $A \sim_b B$ genau dann, wenn $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$
 - (c) $A \sim_c B$ genau dann, wenn $B = P^T \cdot A \cdot P$
- (5) Wir betrachten die Determinantenabbildung

$$\det : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) & \mapsto & \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{array}$$

- (a) Zeigen Sie, dass \det eine Bilinearform ist.
- (b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von \det bzgl. der kanonischen Basis von \mathbb{R}_2 .