Name: ....

Matr.Nr.: ....

Stud.Kennz.: ....

Klausur
"Lineare Algebra für Physiker(innen)" (326.017)
28.1.2020

Bitte folgendes beachten:

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

Alle Antworten sind zu begründen; ein simples "ja/nein" reicht nicht.

(1) Wir betrachten $n \times n$–Matrizen über $\mathbb{R}$. Seien P und Q reguläre Matrizen. Betrachten Sie die unten stehenden Relationen $\sim_a, \sim_b, \sim_c$. Weisen Sie für eine dieser Relationen nach, dass sie eine Äquivalenzrelation ist; und beschreiben Sie für jede dieser Relationen die Eigenschaften von A und B, welche unter dieser Äquivalenzrelation gleich bleiben.

(a) $A \sim_a B$ genau dann, wenn $B = Q \cdot A \cdot P$
(b) $A \sim_b B$ genau dann, wenn $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$
(c) $A \sim_c B$ genau dann, wenn $B = P^T \cdot A \cdot P$

(2) Wir betrachten die Determinantenabbildung

$$\begin{array}{rccc} \det : & \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) & \mapsto & \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Zeigen Sie, dass det eine Bilinearform ist.
(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von det bzgl. der kanonischen Basis von $\mathbb{R}_2$.

! umblättern !

(3) Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen inneren Produkt. Sei W der Teilraum $\mathrm{span}(w_1, w_2, w_3)$, mit

$$w_1 = (0,1,0,1),\ w_2 = (-1,0,1,0),\ w_3 = (1,1,0,1).$$

(a) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ für den Teilraum W.
(b) Berechnen Sie zu $u = (1,1,1,1)$ die beste Approximation (Fourier-Approximation) in W.

(4) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ diejenige lineare Abbildung, für welche gilt

$$f(\underbrace{1,1,1}_{b_1}) = (2,1),\ f(\underbrace{0,1,1}_{b_2}) = (1,0),\ f(\underbrace{1,0,1}_{b_3}) = (1,1).$$

Dabei ist $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. C sei die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$.
(a) Berechnen Sie $f(-1,0,1)$.
(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{A}(f,B,C)$ von f bzgl. B und C. Prüfen Sie das Resultat in (a) nach mittels $\mathcal{A}(f,B,C)$.

(5) Wir betrachten lineare Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$.
(a) Geben Sie ein homogenes lineares Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ in 3 Variablen an, dessen Lösungsraum die Dimension 1 hat.
(b) Geben Sie einen Vektor b an, sodass $A \cdot x = b$ lösbar ist, und einen Vektor b', sodass $A \cdot x = b'$ unlösbar ist.