3 Vektorräume

3.1 Was ist ein Vektorraum?

Was wir in den vorangegangenen Kapiteln an Matrizen und Vektoren gesehen haben, wollen wir nun mathematisch abstrahieren. Das führt auf den Begriff des Vektorraumes, den zentralen Begriff in der Linearen Algebra.

Definition 3.1.1: *Sei $K = (K, +, \cdot)$ ein Körper. Ein* **Vektorraum über** *K ist eine Menge V mit einer Operation $+ : V \times V \longrightarrow V$ (***Addition***) und einer Operation $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ (***Skalarmultiplikation***), für welche die folgenden Axiome gelten:*

(V1) für alle $x, y \in V$: $x + y = y + x$;

(V2) für alle $x, y, z \in V$: $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(V3) es gibt ein Element 0 in V, sodass für alle $x \in V$: $x + 0 = x$;

(V4) für jedes $x \in V$ gibt es $-x \in V$, sodass $x + (-x) = 0$;

(V5) für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$: $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;

(V6) für alle $x \in V$ und $\lambda, \mu \in K$: $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;

(V7) für alle $x \in V$ und $\lambda, \mu \in K$: $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$;

(V8) für alle $x \in V$: $1 \cdot x = x$.

Die Elemente des Vektorraums V nennen wir **Vektoren**. *$0 \in V$ heisst der* **Nullvektor**. *Einen Vektorraum nennen wir auch manchmal einen* **linearen Raum**.

Die Axiome (V1) bis (V4) drücken aus, dass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist.
Meist schreiben wir die Operation "$\cdot$" der Skalarmultiplikation nicht an, sondern drücken das Skalarprodukt aus als λx.
Um eine Verwechslung der Nullelemente von K bzw. V zu vermeiden, schreiben wir – wenn nötig – 0_K bzw. 0_V.

Beispiel 3.1.2: Die Menge $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ der $m \times n$ Matrizen über dem Körper K bildet einen Vektorraum. Das haben wir in den Sätzen 2.1.5, 2.1.6, 2.1.7, 2.1.9 nachgewiesen.
Insbesondere sind $\mathrm{Mat}_{1\times n}(K)$ bzw. $\mathrm{Mat}_{m\times 1}(K)$, also die Zeilenvektoren der Länge n bzw. die Spaltenvektoren der Länge m, Vektorräume.
Die Menge der Zeilenvektoren $\mathrm{Mat}_{1\times n}(K)$ ist offenbar nur eine andere Schreibweise für das kartesische Produkt K^n. Also ist K^n ein Vektorraum über K. □

Beispiel 3.1.3: (i) Für $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ bilden die Lösungen des homogenen SLG

$$A \cdot x = 0$$

einen Vektorraum über K.
(ii) Die Differentialgleichung

$$y''(x) - y(x) = 0$$

hat als Lösungen die komplexen Funktionen

$$y(x) = a \cdot e^x + b \cdot e^{-x}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Die Lösungen bilden also einen Vektorraum über $\mathbb{C}$. □

Beispiel 3.1.4: (i) Sei $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Für zwei Funktionen $f, g \in \mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definieren wir die Addition von f und g wie folgt:

$$\begin{array}{rccc} f+g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} .$$

Weiters definieren wir für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ die Skalarmultiplikation wie folgt:

$$\begin{array}{rccc} \lambda f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array} .$$

Nimmt man als Nullvektor die Nullfunktion, welche jedes $x \in \mathbb{R}$ auf 0 abbildet, und als $-f$ die Funktion, welche x abbildet auf $-f(x)$, so weist man leicht nach, dass $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit diesen Operationen ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.
(ii) Sei $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ die Menge aller Polynome $p(x)$ in $\mathbb{R}[x]$ mit $\mathrm{grad}(p) \leq n$. Also

$$\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\} .$$

Auf $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ haben wir die übliche Addition (welche aus der Menge nicht hinausführt) und die (Skalar-)Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Polynome vom Grad kleiner gleich n bilden einen Vektorraum über $\mathbb{R}$, wenn wir als Nullvektor das Nullpolynom wählen, und für

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

setzen

$$-p(x) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0 .$$

Ebenso sieht man natürlich, dass für jeden Körper K die Menge $\mathrm{Pol}_n(K)$ ein Vektorraum über K ist.
Auch $\mathrm{Pol}(K)$, die Menge aller Polynome (ohne Gradbeschränkung) ist ein Vektorraum über K. □

Beispiel 3.1.5: Jede komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben als

$$c = a + bi, \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R} .$$

Dabei ist $a = \mathrm{re}(c)$ und $b = \mathrm{im}(c)$. Solche Darstellungen lassen sich addieren und mit Skalaren aus $\mathbb{R}$ multiplizieren. $\mathbb{C}$ ist also ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. □

Satz 3.1.6: *Ist V ein Vektorraum über dem Körper K, dann gilt:*

(i) $\forall \lambda \in K: \ \lambda 0_V = 0_V$;

(ii) $\forall x \in V: \ 0_K x = 0_V$;

(iii) $\forall \lambda \in K, x \in V: \ \lambda x = 0_V \Longrightarrow (\lambda = 0_K \vee x = 0_V)$;

(iv) $\forall \lambda \in K, x \in V: \ (-\lambda)x = -(\lambda x) = \lambda(-x)$.

Beweis:
(i) Wegen (V3) und (V5) haben wir

$$\lambda 0_V = \lambda(0_V + 0_V) = \lambda 0_V + \lambda 0_V \ .$$

Indem wir auf beiden Seiten $-(\lambda 0_V)$ addieren, erhalten wir die Behauptung.
(ii) Wegen (V6) haben wir

$$0_K x = (0_K + 0_K)x = 0_K x + 0_K x \ .$$

Indem wir auf beiden Seiten $-(0_K x)$ addieren, erhalten wir die Behauptung.
(iii) Wir nehmen an $\lambda x = 0_V$ und $\lambda \neq 0_K$. Dann gibt es λ^{-1}. Aus (V7) und (i) folgt daraus

$$x = 1x = (\lambda^{-1}\lambda)x = \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} 0_V = 0_V \ .$$

(iv) Wegen (ii) und (V6) haben wir

$$0_V = (\lambda + (-\lambda))x = \lambda x + (-\lambda)x \ .$$

Indem wir auf beiden Seiten $-(\lambda x)$ addieren, erhalten wir $-(\lambda x) = (-\lambda)x$.
Wegen (i) und (V5) haben wir

$$0_V = \lambda(x + (-x)) = \lambda x + \lambda(-x) \ .$$

Indem wir auf beiden Seiten $-(\lambda x)$ addieren, erhalten wir $-(\lambda x) = \lambda(-x)$. □

Indem wir diese Zusammenhänge für Vektorräume beweisen, beweisen wir sie also gleichzeitig fuer Matrizen, Polynome, und Funktionenräume. Das ist der Vorteil der Abstraktion.

Definition 3.1.7: *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Eine nicht-leere Teilmenge W von V heisst* **Teilvektorraum** *oder* **linearer Teilraum** *oder* **linearer Unterraum** *von V, wenn W abgeschlossen ist unter den Operationen in V; also wenn gilt*

(i) $\forall x, y \in W : \ x + y \in W$;

(ii) $\forall x \in W, \lambda \in K : \ \lambda x \in W$.

Ist W ein Teilraum von V, so enthält W offenbar ein Element x. Mit x enthält W auch $-x = (-1)x$. Somit enthält W auch den Nullvektor: $0 = x - x$. Jeder Teilvektorraum W von V über K ist also für sich ein linear Raum über K.

Beispiel 3.1.8: Sei V ein Vektorraum.

(i) Der Vektorraum V ist trivialerweise ein Teilvektorraum von sich selbst.

(ii) Wegen Satz 3.1.6.(i) ist $\{0_V\}$ ein Teilvektorraum von V.

(iii) $\mathbb{R}$ ist ein Teilvektorraum von $\mathbb{C}$, vgl. Beispiel 5.5.

(iv) Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ (wobei also der Grundkörper $\mathbb{R}$ ist) ist die Teilmenge

$$X = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$$

ein Teilvektorraum. Ebenso natürlich auch

$$Y = \{(0,y)|y \in \mathbb{R}\} \ .$$

(v) Das Beispiel (iv) lässt sich verallgemeinern. In $\mathbb{R}^2$ lässt sich jede Gerade durch den Ursprung schreiben als

$$L = \{(x,y)|ax + by = 0\}$$

für bestimmte $a, b \in \mathbb{R}$. Der Winkel α, den L mit der x-Achse einschliesst, ist gegeben durch $\tan(\alpha) = -a/b$.
Die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind auf L g.d.w.

$$ax_1 = -by_1 \quad \text{und} \quad ax_2 = -by_2 \ .$$

Somit gilt auch

$$a(x_1 + x_2) = -b(y_1 + y_2) \ ,$$

also

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in L \ .$$

Ausserdem gilt auch für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \in L \ .$$

Somit ist also jede Gerade L durch den Ursprung ein Teilvektorraum von $\mathbb{R}^2$. □

Satz 3.1.9: *Sei $\{V_i|i \in I\}$ eine nicht-leere Familie von Teilvektorräumen des Vektorraums V. Dann ist der Durchschnitt all dieser Teilvektorräume, also*

$$\bigcap_{i \in I} V_i \ ,$$

ebenfalls ein Teilvektorraum von V.

Im Gegensatz zu Satz 3.1.9 ist die Vereinigung von Teilvektorräumen i.a. kein Teilvektorraum. Etwa $X \cup Y$ aus Beispiel 3.1.8(iv) ist kein Teilvektorraum in $\mathbb{R}^2$.

Beispiel 3.1.10: Wegen Satz 2.2.36 ist die Lösungsmenge eines homogenen Systems linearer Gleichungen in n Variablen über dem Körper K ein Unterraum von K^n. □

Satz und Definition 3.1.11: *Sei S eine beliebige Teilmenge des Vektorraums V. Dann ist der Durchschnitt aller Teilvektorräume von V, welche S enthalten, wiederum ein Vektorraum von V. Wir bezeichnen diesen kleinsten Teilraum, der S enthält, mit $\langle S \rangle$.*

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz 3.1.9. □

Beispiel 3.1.12: Wir betrachten Teilräume im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$.

(i) Ist $(x,y) \neq (0,0)$, dann ist $\langle\{(x,y)\}\rangle$ die Gerade durch (x,y) und den Ursprung.
$\langle\{(0,0)\}\rangle = \{(0,0)\}$.

(ii) Sind $(x, y), (u, v)$ verschieden vom Nullvektor und (u, v) kein Vielfaches von (x, y), dann ist $\langle\{(x, y), (u, v)\}\rangle = \mathbb{R}^2$.

In Kapitel 2 (2.2.15) haben wir schon Linearkombinationen von Zeilenvektoren betrachtet. Wir führen diesen Begriff nun für Vektorräume im allgemeinen ein.

Definition 3.1.13: *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei S eine Teilmenge von V. Für $x_1, \ldots, x_n \in S$ (also endlich viele) und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ heisst*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

Linearkombination von Elementen von S.

Die leere Summe von Vektoren ist der Nullvektor 0_V, dieser ist also auch eine Linearkombination von $\emptyset$.

Satz 3.1.14: *Ist V ein Vektorraum über dem Körper K und $S \subseteq V$, dann ist*

$$\langle S\rangle = \{v \in V \mid v \text{ ist Linearkombination von Elementen von } S\} .$$

Insbesondere ist die Menge der Linearkombinationen ein Teilvektorraum von V.

Beweis: Sei L die Menge der Linearkombinationen (rechte Seite). Wegen $x = 1 \cdot x$ ist S Teilmenge der Menge L der Linearkombinationen von Elementen von S. Die Summe von Linearkombinationen ist eine Linearkombination, ebenso Skalarprodukte von Linearkombinationen. 0_V ist eine Linearkombination von Elementen von S, auch wenn $S = \emptyset$ (die leere Summe ist das neutrale Element). Somit ist die Menge der Linearkombinationen von S ein Teilvektorraum von V, welcher S enthält. Also $\langle S\rangle \subseteq L$.
Umgekehrt enthält jeder Teilvektorraum mit S auch alle Linearkombinationen von S.
Also ist $\langle S\rangle$ genau die Menge L der Linearkombinationen von Elementen von S. □

Definition 3.1.15: *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei S eine Teilmenge von V. Die Menge $\langle S\rangle$ der Linearkombinationen von Elementen von S heisst* **der von S aufgespannte Teilvektorraum**, *geschrieben* $\mathrm{span}(S)$, *oder auch die* **lineare Hülle** *von S. S heisst eine* **Spannmenge** *von* $\langle S\rangle = \mathrm{span}(S)$.

Beispiel 3.1.16:

(i) Im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ betrachten wir die Vektoren

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{1}, 0 \ldots, 0) .$$

Dann lässt sich jeder Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben als

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i .$$

Also für $E = \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ist $\mathrm{span}(E) = \mathbb{R}^n$.

(ii) Für $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ gilt $\mathrm{span}(S) = \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$. □

Definition 3.1.17: *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei S eine Teilmenge von V.*
S heisst **linear abhängig**, *wenn es (endlich viele) verschiedene Elemente $x_1, \ldots, x_n \in S$ gibt und Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ (also mindestens ein Skalar von 0 verschieden), sodass sich der Nullvektor ausdrücken lässt als*

$$0_V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ .$$

Ist das nicht der Fall, so heisst S **linear unabhängig**.
Ein Vektor $x \in V$ heisst **linear abhängig von** *S, wenn $x \in \operatorname{span}(S)$.* □

Beispiel 3.1.18: (i) Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ der Vektor in $\mathbb{R}^n$, welcher überall 0 enthält, nur an der i-ten Stelle 1. Dann ist die Menge

$$\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

linear unabhängig.
(ii) In $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ ist die Menge

$$\{x^i \mid 0 \leq i \leq n\} = \{1, x, \ldots, x^n\}$$

linear unabhängig.
(iii) In $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bezeichnen wir für $a \in \mathbb{R}$ mit f_a die Funktion, welche alle reellen Zahlen auf 0 abbildet, nur a auf 1. Dann ist die Menge

$$\{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$$

linear unabhängig. Sei weiters g die konstante Funktion mit Wert 1 auf $\mathbb{R}$, also $g(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist auch $\{f_a \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{g\}$ linear unabhängig? □

Satz 3.1.19: *Sei V ein Vektorraum über K und $S \subseteq V$.*

(i) Die leere Menge $\emptyset \subseteq V$ ist immer linear unabhängig.

(ii) Enthält S den Nullvektor 0_V, so ist S linear abhängig.

(iii) Ist $x \in V \setminus \{0_V\}$, so ist die einelementige Menge $\{x\}$ linear unabhängig.

(iv) Sei $|S| \geq 2$. Dann ist S linear abhängig g.d.w. es ein $x \in S$ gibt, sodass x linear abhängig ist von $S \setminus \{x\}$, also $x \in \operatorname{span}(S \setminus \{x\})$.

(v) Ist S linear unabhängig und $x \in V \setminus \operatorname{span}(S)$, dann ist auch $S \cup \{x\}$ linear unabhängig.

Beweis:
(i) Offensichtlich gibt es in $0_V = \sum_{x \in \emptyset} \lambda_x x$ keinen Koeffizienten verschieden von 0_K.
(ii) $0_V = 1 \cdot 0_V$.
(iii) $0_V = \lambda x$ ist nur möglich für $\lambda \neq 0_K$.
(iv) Sei $0_V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ eine nicht-triviale Linearkombination von Elementen von S. O.B.d.A. sei $\lambda_1 \neq 0$. Dann ist

$$x_1 = -\sum_{i=2}^{n} (\lambda_i / \lambda_1) x_i \ ,$$

also $x_1 \in \operatorname{span}(S \setminus \{x_1\})$.
(v) Eine Darstellung von 0 als Linearkombination über $S \cup \{x\}$ kann x nicht enthalten, weil ja $x \notin \operatorname{span}(S)$. Also muss wegen der linearen Unabhängigkeit von S eine solche Linearkombination trivial sein. □

Beispiel 3.1.20: Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$. und darin die Polynome

$$p(x) = 2 + x + x^2, \quad q(x) = x + 2x^2, \quad r(x) = 2 + 2x + 3x^2 \ .$$

Eine allgemeine Linearkombination

$$\lambda p(x) + \mu q(x) + \nu r(x)$$

dieser Polynome ist

$$(2\lambda + 2\nu) + (\lambda + \mu + 2\nu)x + (\lambda + 2\mu + 3\nu)x^2 \ .$$

Eine solche Linearkombination ist nur dann 0, wenn jeder Koeffizient 0 ist; also wenn

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

1.Spalte + 2.Spalte = 3. Spalte. Die Koeffizientenmatrix diese linearen Gleichungssystems hat Rang 2, es existiert also wegen Satz 3.34 eine nicht-triviale Lösung λ_0, μ_0, ν_0. Somit ist

$$\lambda_0 p(x) + \mu_0 q(x) + \nu_0 r(x) = 0$$

eine nicht-triviale Linearkombination, welche 0 ergibt. Die Polynome $p(x), q(x), r(x)$ sind also linear abhängig. □

3.2 Basis und Dimension

Definition 3.2.1: *Sei V ein Vektorraum und B eine Teilmenge von V. B ist eine* **Basis** *für V g.d.w.*
- $V = \operatorname{span}(B)$ *und*
- *B linear unabhängig ist.*

Beispiel 3.2.2:

(i) Die Menge der Einheitsvektoren

$$\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

ist eine Basis für $\mathbb{R}^n$. Diese Basis heisst auch die **natürliche** oder **kanonische** Basis von $\mathbb{R}^n$.

(ii) Die Menge der "Terme"

$$\{x^i \mid 0 \leq i \leq n\}$$

ist eine Basis für $\operatorname{Pol}_n(\mathbb{R})$.

(iii) $\{1, i\}$ ist eine Basis des Vektorraums $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$. Vgl. Beispiel 3.1.5.

(iv) Sei $\operatorname{Fol}(K) := K^{\mathbb{N}}$ (vgl. Def. 1.3.35) die Menge aller Folgen mit Elementen im Körper K. Analog zur Situation in $\mathbb{R}^n$ können wir die Einheitsfolgen $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ betrachten, wobei die einzige 1 in e_i an der i-ten Stelle steht. Dann ist die Menge der Einheitsfolgen

$$\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

wohl linear unabhängig, aber keine Basis für $\operatorname{Fol}(K)$.

Satz 3.2.3: *Eine nicht-leere Teilmenge B eines Vektorraums V ist eine Basis von V g.d.w. jedes Element von V eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von Elementen von B hat.*

Beweis:
"$\Rightarrow$": Sei S eine Basis von V. Jedes $x \in V$ lässt sich also laut Def. darstellen als Linearkombination von Elementen von S. Seien

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;=\; x \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mu x_i$$

zwei solche Darstellungen von x (dabei können wir natürlich immer über dieselbe endliche Menge summieren), dann gilt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x_i \ .$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von S muss also $\lambda_i = \mu_i$ sein für alle i. Jedes $x \in V$ hat also eine eindeutige Darstellung.
"$\Leftarrow$": Andererseits nehmen wir an, dass sich jedes Element von V auf eindeutige Weise schreiben lässt als Linearkombination von Elementen von S. Somit lässt sich also der

Nullvektor 0 nur als triviale Linearkombination schreiben, S ist also linear unabhängig. Ausserdem $\operatorname{span}(S) = V$. S ist also eine Basis von V. $\square$

Satz 3.2.4: *Sei S eine linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums V, und sei G eine Spannmenge von V mit $S \subseteq G$. Dann gibt es (mindestens) eine Basis B von V mit $S \subseteq B \subseteq G$.*

Beweis: Wir betrachten die Menge aller linear unabhängigen Mengen T, welche Obermengen von S und Teilmengen von G sind, also

$$\mathcal{B} := \{T \mid S \subseteq T \subseteq G \text{ und } T \text{ ist linear unabhängig}\} .$$

Die Menge $\mathcal{B}$ ist durch die Teilmengenbeziehung "$\subseteq$" geordnet und erfüllt die Voraussetzung des Lemmas von Zorn: "*Falls jede Kette in einer geordneten Menge $(A, \leq)$ eine obere Schranke (in A) besitzt, so besitzt A (mindestens) ein maximales Element.*"
Ist nämlich

$$S \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \subseteq G$$

eine Kette in $\mathcal{B}$, so ist $\bigcup_i T_i$ eine obere Schranke für die Elemente dieser Kette in $\mathcal{B}$. Somit besitzt $\mathcal{B}$ ein maximales Element B, für welches natürlich gilt $\operatorname{span}(B) = \operatorname{span}(G) = V$ (sonst könnten wir zu B ein Element von G hinzufügen). Dieses B ist also eine Basis von V. $\square$

Korollar: *Jeder Vektorraum besitzt (mindestens) eine Basis.*

Beweis: Man nehme $S = \emptyset, G = V$ in Satz 3.2.4. $\square$

Der Beweis von Satz 3.2.4 verwendet das Lemma von Zorn und ist inkonstruktiv, also ein reiner Existenzbeweis. D.h. es wird nicht explizit gezeigt, wie man für einen Vektorraum tatsächlich eine Basis finden könnte. Das kann unter Umständen ziemlich schwierig sei, oder auch schlicht unmöglich.

Satz 3.2.5: (Austauschsatz von Steinitz) *Sei V ein Vektorraum und seien $m, n \in \mathbb{N}^*$. Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine n-elementige Basis von V, und sei $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ eine m-elementige Menge linear unabhängiger Elemente von V. Dann ist $m \leq n$ und es gibt Indizes $i_1, \ldots, i_{n-m} \in \{1, \ldots, n\}$, sodass auch $\tilde{B} = \{c_1, \ldots, c_m, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{n-m}}\}$ eine Basis von V ist.*

Beweis:
Wir betrachten nach und nach die Elemente von C. c_1 hat eine Darstellung als $\sum \lambda_i b_i$. Ist dabei $\lambda_j \neq 0$ (was natürlich für mindestens ein j der Fall sein muss), so ist auch $B_1 = \{c_1, b_1, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_n\}$ eine Basis. Nun stellt man c_2 dar als Linearkombination von B_1. In dieser Linearkombination ist mindestens einer der Koeffizienten der Elemente $b_1, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_n$ verschieden von 0, etwa von b_k. Dann kann man b_k ersetzen durch c_2, und die so generierte Menge B_2 ist wiederum eine Basis.
Daraus sieht man, dass $m \leq n$ gelten muss, denn sonst liessen sich $c_{n+1}, \ldots, c_m$ darstellen als Linearkombination der Elemente $c_1, \ldots, c_n$ von B_n. Das wäre aber ein Widerspruch zur Annahme der linearen Unabhängigkeit von C.
Schliesslich ist $\tilde{B} = B_m$ die gesuchte Basis. $\square$

Korollar: *Hat der Vektorraum V eine Basis B mit n Elementen, so ist jede n-elementige linear unabhängige Menge eine Basis von V.*

Satz 3.2.6: *Hat der Vektorraum V eine endliche Basis B, dann ist jede Basis B' von V endlich und es gilt $|B| = |B'|$.*

Beweis: Sei $|B| = n$. Aus Satz 3.2.5 (Steinitz) folgt, dass jede linear unabhängige Menge B' endlich ist und ausserdem $|B'| \leq n$. Durch wechselseitige Anwendung von Satz 3.2.5 auf B und B' folgt $|B| = |B'|$. □

Satz 3.2.7: *Je zwei Basen eines Vektorraum V sind gleich mächtig.*

Beweis: Ist eine Basis endlich, so folgt die Behauptung aus Satz 3.2.6.
Für unendliche Basen verwendet man dazu Arithmetik von Kardinalzahlen. □

Satz 3.2.8: *Sei V ein Vektorraum und S eine Teilmenge von V. FAÄ:*

(i) S ist eine Basis von V.

(ii) S ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V (also ist $T \subseteq V$ linear unabhängig mit $S \subseteq T$, dann gilt $S = T$).

(iii) S ist eine minimale Spannmenge von V (also ist $T \subseteq V$ so dass $\operatorname{span}(T) = V$ und $T \subseteq S$, dann gilt $S = T$).

Beweis:
"(i) $\Longrightarrow$ (ii)": Sei $x \in V \setminus S$. $S \cup \{x\}$ kann nicht linear unabhängig sein, da x bereits als Linearkombination von S darstellbar ist, und natürlich auch als $x = 1 \cdot x$. Die Differenz dieser beiden Darstellung wäre eine nichttriviale Darstellung von 0.
"(ii) $\Longrightarrow$ (i)": Wegen Satz 3.2.4 gibt es eine Basis B mit $S \subseteq B$. Wegen der Maximalität von S muss gelten $S = B$, S ist also eine Basis.
"(i) $\Longrightarrow$ (iii)": Wäre S nicht minimal, dann gäbe es ein $x \in S$, sodass $S \setminus \{x\}$ ebenfalls V aufspannt. Somit hätte x zwei verschiedene Darstellungen als Linearkombination über S; S wäre also keine Basis.
"(iii) $\Longrightarrow$ (i)": Es gibt eine Basis B mit $\emptyset \subseteq B \subseteq S$. Aber B spannt auch V auf. Aus (iii) folgt somit $B = S$, also S ist eine Basis. □

Definition 3.2.9: *Sei V ein Vektorraum über K. Die Kardinalzahl einer (und daher auch jeder) Basis von V heisst die* **Dimension** *von V, geschrieben $\dim_K V$. Ist K aus dem Kontext klar, so schreiben wir auch einfach $\dim V$.*
V ist ein **endlich dimensionaler** *Vektorraum g.d.w. $\dim V = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.*

Beispiel 3.2.10:

(i) $\dim_K K^n = n$ für einen Körper K.

(ii) $\dim_K \operatorname{Mat}_{m\times n}(K) = mn$ für einen Körper K.

(iii) $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Pol}_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

Satz 3.2.11: *Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum, und W ein Unterraum von V.*

(i) *Dann ist auch W endlichdimensional mit $\dim W \leq \dim V$.*

(ii) *Ist $\dim W = \dim V$, dann $W = V$.*

Beweis: (i) Sei n die Dimension von V. Eine Basis B von W kann laut Satz von Steinitz zu einer Basis von V erweitert werden. Somit gilt $\dim W = |B| \leq \dim V$.
(ii) Ist $\dim W = n$, so ist ebenfalls wegen des Satzes von Steinitz eine Basis von W auch eine Basis von V, also $W = V$. □

Satz 3.2.11(ii) gilt übrigens nicht für unendlichdimensionale Vektorräume. Der Raum der reellen Polynome mit geraden Exponenten ist ein echter Teilraum von $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$, hat aber dieselbe Dimension.

Satz und Definition 3.2.12: *Sei V ein Vektorraum über K. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation in V, welche sowohl mit der Addition als auch mit der Skalarmultiplikation verträglich ist, also*

$$\forall v_1, v_2, v_3 \in V \ \forall \lambda \in K: \ v_1 \sim v_2 \Longrightarrow (v_1 + v_3 \sim v_2 + v_3) \text{ und } (\lambda v_1 \sim \lambda v_2) \ .$$

Definiert man auf der Faktormenge $V/\sim = \{K_\sim(v) | v \in V\}$ die Operationen

$$K_\sim(v) + K_\sim(v') := K_\sim(v + v') \quad \text{und} \quad \lambda K_\sim(v) := K_\sim(\lambda v) \ ,$$

so ist dies wohldefiniert und macht $V/\sim$ zu einem Vektorraum über K. Dieser Vektorraum heisst der **Faktorraum** *von V nach $\sim$.*
Jeder Unterraum W von V erzeugt in V die Äquivalenzrelation $v_1 \sim_W v_2 \Longleftrightarrow v_1 - v_2 \in W$. Diese ist verträglich mit Addition und Skalarmultiplikation. Der Faktorraum $V/\sim_W$ wird dann geschrieben als $V/_W$ und heisst **Faktorraum von V nach dem Unterraum W**. *Die Äquivalenzklasse von $v \in V$ bzgl. $\sim_W$ ist also*

$$v + W = \{v + w \mid w \in W\}$$

und heisst eine **lineare Mannigfaltigkeit**.

Beispiel 3.2.13: Sei $Ax = b$ ein System von m linearen Gleichungen in n Variablen über dem Körper K. Die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems bildet einen Unterraum L von K^n. Sei $a \in K^n$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems. Dann ist die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems von der Form

$$a + L \ ,$$

also eine lineare Mannigfaltigkeit in K^n. □

3.3 Lineare Abbildungen

Bei der Untersuchung einer algebraischen Struktur spielen im wesentlichen immer zwei Konzepte eine wichtige Rolle: Unterstrukturen, also Teilmengen mit derselben Struktur, und Morphismen, also strukturerhaltende Abbildungen. Mit Teilvektorräumen haben wir uns schon im vorigen Kapitel befasst. Nun wenden wir uns den Morphismen auf Vektorräumen zu.

Im Kapitel 2 haben wir Koeffizientenmatrizen $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ betrachtet und lineare Gleichungssysteme

$$A\,x \;=\; b$$

gelöst. Eine solche Matrix A induziert aber auch eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f_A: & K_n & \longrightarrow & K_m \\ & x & \mapsto & Ax \end{array}$$

Diese Abbildung besitzt folgende Eigenschaften:

$$\begin{array}{rcll} f_A(0) & = & 0\;, & \\ f_A(x+y) & = & f_A(x)+f_A(y) & \forall x,y \in K_n, \\ f_A(\lambda x) & = & \lambda f_A(x) & \forall x \in K_n, \forall \lambda \in K. \end{array}$$

Sie ist also verträglich mit der Vektorraumstruktur. Im folgenden werden wir eine solche vertägliche Abbildung eine lineare Abbildung nennen.

Definition 3.3.1: *Seien V und W Vektorräume über demselben Körper K. Eine* **lineare Abbildung** *bzw.* **lineare Transformation** *bzw.* **Vektorraumhomomorphismus** *ist eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$, sodass*

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *für alle $x, y \in V$, und*

(ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ *für alle $x \in V$ und $\lambda \in K$.*

Eine Abbildung $g : V \longrightarrow W$ heisst **affin**, *wenn es Abbildungen f und c von V nach W gibt, sodass f linear ist, c konstant ist, und $g = f + c$.*

Beispiel 3.3.2: Die folgenden Abbildungen sind lineare Abbildungen, also Vektorraumhomomorphismen.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f((x,y)) = (x+y, x-y, y)$.
Für alle $(x,y), (u,v) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{array}{rcl} f((x,y)+(u,v)) & = & f((x+u, y+v)) \\ & = & (x+u+y+v,\; x+u-y-v,\; y+v) \\ & = & (x+y, x-y, y) \;+\; (u+v, u-v, v) \\ & = & f((x,y)) \;+\; f((u,v))\;, \end{array}$$

und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda(x,y)) & = & f((\lambda x, \lambda y)) \\ & = & (\lambda x + \lambda y,\; \lambda x - \lambda y,\; \lambda y) \\ & = & \lambda(x+y, x-y, y) \\ & = & \lambda f((x,y))\;. \end{array}$$

(ii) Die Projektion auf die i-te Komponente $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathrm{pr}_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

(iii) Die Ableitungs- oder Differentiationsabbildung auf dem Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$:
$D : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ mit $D(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$.
In Vektorschreibweise haben wir

$$D((a_0, a_1, \ldots, a_n)^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & & & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(iv) Die Integralabbildung $I : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, welche definiert ist als

$$I(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx \ .$$

Wir bestimmen eine Matrizendarstellung dieser linearen Abbildung:

$$\int_0^1 x^i = \frac{x^{i+1}}{i+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{i+1}$$

Also in Vektorschreibweise

$$I((a_0, a_1, \ldots, a_n)^T) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Satz 3.3.3: *Seien V, W, U Vektorräume über K. Sei f eine lineare Abbildung von V nach W, und sei g eine lineare Abbildung von W nach U. Dann gilt:*

(i) $f(0_V) = 0_W$, und

(ii) $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in V$.

(iii) $g \circ f$ ist eine lineare Abbildung von V nach U.

(iv) Falls X ein Teilraum von V ist, so ist $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ ein Teilraum von W.

(v) Falls Y ein Teilraum von W ist, so ist $f^{-1}(Y) = \{v \in V \mid f(v) \in Y\}$ ein Teilraum von V.

Beweis: (i) Es gilt $f(0_V) = f(0_K 0_V) = 0_K f(0_V) = 0_W$.
(ii) Wegen (i) gilt für alle $x \in V$: $f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0_V) = 0_W$. Daraus folgt die Behauptung.
(iii) $g \circ f(v_1 + \lambda v_2) = g(f(v_1) + \lambda f(v_2)) = g \circ f(v_1) + \lambda g \circ f(v_2)$.
(iv) Sei also X ein Teilraum von V. $f(X)$ ist nicht leer, denn $0_V \in X$ und daher $0_W =$

$f(0_V) \in f(X)$.
Seien nun $w_1, w_2 \in f(X)$. Dann gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = w_1$ und $f(x_2) = w_2$. Da X ein Teilraum von V ist, haben wir somit

$$w_1 + w_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(X) \ ,$$

und für jeden Skalar $\lambda \in K$

$$\lambda w_1 = \lambda f(x_1) = f(\lambda x_1) \in f(X) \ .$$

$f(X)$ ist also ein Teilraum von W.
(v) Sei also Y ein Teilraum von W. $f^{-1}(Y)$ ist nicht leer, denn $f(0_V) = 0_W \in Y$, also $0_V \in f^{-1}(Y)$.
Sind nun $x_1, x_2 \in f^{-1}(Y)$ und ist $\lambda \in K$, dann

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \in Y \quad \text{und} \quad f(\lambda x_1) = \lambda f(x_1) \in Y \ ,$$

und somit sind

$$x_1 + x_2 \in f^{-1}(Y) \quad \text{und} \quad \lambda x_1 \in f^{-1}(Y) \ .$$

$f^{-1}(Y)$ ist also ein Teilraum von V. □

Definition 3.3.4: *Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Der Teilraum $f(V)$ von W heisst das* **Bild** *(auch* **Image***) von f, geschrieben* $\mathrm{im}(f)$*. Der Teilraum $f^{-1}(\{0_W\})$ von V heisst der* **Kern** *bzw.* **Nullraum** *von f, geschrieben* $\mathrm{kern}(f)$*.*

Beispiel 3.3.5:

(i) Wir betrachten im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (also über $\mathbb{R}$) die Projektion auf die i-te Komponente $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Das Bild von pr_i ist ganz $\mathbb{R}$, und der Kern von pr_i ist die Menge der n-Tupel, deren i-te Komponente 0 ist.

(ii) Wir betrachten die Differentiationsabbildung D im reellen Vektorraum $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$. Das Bild von D ist $\mathrm{Pol}_{n-1}(\mathbb{R})$, und der Kern von D ist $\mathrm{Pol}_0(\mathbb{R})$.

(iii) Sei A eine $n \times n$ Matrix über dem Körper K. Sei f_A die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f_A : & \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K) & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K) \\ & x & \mapsto & Ax \end{array} \ .$$

Das Bild $\mathrm{im}(f_A)$ besteht aus allen Spaltenvektoren y, für welche es einen Spaltenvektor x gibt mit $Ax = y$; also aus allen y, welche sich schreiben lassen als Linearkombinationen der Spalten $a_1, \ldots, a_n$ der Matrix A; also $\mathrm{im}(f_A) = \mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_n\})$. Der Kern von f_A besteht aus allen Spaltenvektoren x, für welche gilt $Ax = 0$; der Kern ist also der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$.

(iv) Im Vektorraum $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ betrachten wir den von Sinus und Cosinus aufgespannten Teilraum, also

$$V = \mathrm{span}(\{\sin, \cos\}) \ .$$

Die Elemente von V sind von der Form

$$f(x) = a \sin(x) + b \cos(x) \ , \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R} \ .$$

Sei $I : V \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$I(f) := \int_0^\pi f(x)dx \ .$$

I ist eine lineare Abbildung. Eine Funktion $f(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$ ist im Kern von I g.d.w.

$$0 \;=\; \int_0^\pi (a\sin(x) + b\cos(x))dx \;=\; -a\cos(x) + b\sin(x)\Big|_0^\pi \;=\; 2a \ ,$$

also g.d.w. $a = 0$. Wir sehen also, dass $\mathrm{kern}(I) = \mathrm{span}(\{\cos\})$.

(v) Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(a, b, c, d) = (a + b, b - c, a + d) \ .$$

Aus $(a + b, b - c, a + d) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, -1, 0) + d(0, 0, 1)$ sehen wir

$$\mathrm{im}(f) = \mathrm{span}(\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1)\}) \ .$$

Wir wollen eine Basis für $\mathrm{im}(f)$ bestimmen. Dazu transformieren wir die Matrix A, deren Zeilen $\mathrm{im}(f)$ aufspannen, in die zugehörige Hermite-Matrix $H(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad H(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Die Zeilen von $H(A)$ spannen denselben Raum auf wie die Zeilen von A. Die ersten drei Zeilen von $H(A)$ sind offensichtlich linear unabhängig, also

$$\begin{aligned} \mathrm{im}(f) &= \mathrm{span}(\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1)\}) \\ &= \mathrm{span}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}) \quad = \quad \mathbb{R}^3 \ . \end{aligned}$$

□

Satz 3.3.6: *Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist injektiv;

(ii) $\mathrm{kern}(f) = \{0\}$.

Beweis: "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Sei f injektiv. Dann gilt $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$. Somit ist $\mathrm{kern}(f) = \{0\}$.
"(ii) $\Rightarrow$ (i)": Sei $\mathrm{kern}(f) = \{0\}$. Aus $f(x) = f(y)$ folgt $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$. Somit ist $x - y \in \mathrm{kern}(f)$, und daher $x = y$. f ist also injektiv. □

Den folgenden Satz führen wir ohne Beweis an.

Satz 3.3.7: *Seien V und W endlich dimensionale Vektorräume über demselben Körper K, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt*

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{im}(f)) + \dim(\mathrm{kern}(f)) \ .$$

Beispiel 3.3.8: Wir betrachten die Differentiationsabbildung D auf $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ (vgl. Beispiel 3.3.2(iii) und Beispiel 3.3.5(ii)). $\dim(\mathrm{im}(D)) = n$, $\dim(\mathrm{kern}(D)) = 1$, und somit haben wir

$$\dim(\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})) = n + 1 = \dim(\mathrm{im}(D)) + \dim(\mathrm{kern}(D)) \ . \qquad \square$$

Satz 3.3.9: *Seien V und W jeweils endlichdimensionale Vektorräume derselben Dimension n über dem Körper K. Sei weiters $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist injektiv;

(ii) f ist surjektiv;

(iii) f ist bijektiv;

(iv) f bildet Basen auf Basen ab; ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V, dann ist $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ eine Basis von W.

Beweis: "(i) $\Longrightarrow$ (i), (iii)": Ist f injektiv, dann ist $\mathrm{kern}(f) = \{0\}$, also $\dim(\mathrm{kern}(f)) = 0$. Damit folgt aus Satz 3.3.7

$$\dim(\mathrm{im}(f)) = n = \dim(V) = \dim(W) \ .$$

Mit Satz 3.2.11 folgt daraus $\mathrm{im}(f) = W$. f ist also auch surjektiv, und daher bijektiv.
"(ii) $\Longrightarrow$ (i), (iii)": Ist f surjektiv, dann ist $\mathrm{im}(f) = W$. Damit folgt aus Satz 3.3.7

$$\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(W) = n = \dim(V) = \dim(\mathrm{im}(f)) + \dim(\mathrm{kern}(f)) \ .$$

Also ist $\dim(\mathrm{kern}(f)) = 0$, und somit $\mathrm{kern}(f) = \{0\}$. Wegen Satz 3.3.6 ist also f injektiv, und daher bijektiv.
"(iii) $\Longrightarrow$ (i)" und "(iii) $\Longrightarrow$ (ii)" sind offensichtlich.
"(i) $\Longrightarrow$ (iv)": Sei f injektiv. Ist $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis des n-dimensionalen Vektorraums V, dann sind die Elemente $f(v_1), \dots, f(v_n) \in W$ paarweise verschieden. Um zu sehen, dass das Bild der Basis B eine Basis von W ist, schreiben wir 0_W als eine beliebige Linearkombination von $f(B)$: $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i) = 0$. Dann gilt $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = 0$. Nun ist aber $\mathrm{kern}(f) = \{0\}$, also $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$, und weiters $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. $f(B) = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ ist also linear unabhängig. Wegen des Korollars zu Satz 3.2.5 ist somit $f(B)$ eine Basis von W.
"(iv) $\Longrightarrow$ (ii)": aus (iv) folgt unmittelbar $W = \mathrm{span}(f(B)) \subseteq \mathrm{im}(f)$. f ist also surjektiv.
$\square$

Definition 3.3.10: *Seien V und W Vektorräume über dem Körper K, und $h : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung (Homomorphismus) von V nach W.*
Ist h surjektiv, so heisst h ein **Epimorphismus**.
Ist h injektiv, so heisst h ein **Monomorphismus** *bzw. eine* **Einbettung**. *V heisst dann in W* **einbettbar**. *Wir schreiben dafür $V \hookrightarrow W$.*
Ist h bijektiv, so heisst h ein **Isomorphismus**. *In diesem Fall ist dann natürlich auch h^{-1}*

ein Isomorphismus von W nach V, und V und W heissen dann **isomorph**, *geschrieben als $V \cong W$.*
Ist $V = W$, so heisst h ein **Endomorphismus**. *Ein bijektiver Endomorphismus heisst ein* **Automorphismus**.

Satz 3.3.11: (Homomorphiesatz) *Sei f eine lineare Abbildung von V nach W. Dann gilt*

$$V/_{\mathrm{kern}(f)} \;\cong\; im(f) \;.$$

Der Faktorraum nach dem Kern von f ist also isomorph zum Bild von f.

Beweis: die Abbildung $i : V/_{\mathrm{kern}(f)} \longrightarrow \mathrm{im}(f)$ mit $v + \mathrm{kern}(f) \mapsto f(v)$ ist wohldefiniert und ein Isomorphismus. □

Satz 3.3.12: *Auf jeder Menge von Vektorräumen über dem Körper K ist $\cong$ eine Äquivalenzrelation.*

Beweis: offensichtlich. □

Satz 3.3.13:

(i) *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über K, und sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V. Dann ist*

$$\begin{array}{rccc} h_B : & V & \longrightarrow & K^n \\ & \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i & \mapsto & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{array}$$

ein Isomorphismus.

(ii) *Sind V und W zwei Vektorräume endlicher Dimension über K mit $\dim(V) = \dim(W)$, so sind V und W isomorph.*

Beweis: (i) Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung jedes Elements von V als Linearkombination von B ist h_B wohldefiniert und auch ein Isomorphismus.
(ii) Durch zweimalige Anwendung von (i).
Oder: Seien B bzw. C Basen von V bzw. W, und sei $\iota : B \to C$ eine Bijektion zwischen B und C. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} h_\iota : & V & \longrightarrow & W \\ & \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i & \mapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i \iota(b_i) \end{array}$$

(dabei sind $b_1, \dots, b_n$ verschiedene Elemente von B) ein Isomorphismus. □

Beispiel 3.3.14: Die folgenden Vektorräume über K sind isomorph:

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \cong K^{mn} \cong \mathrm{Mat}_{n\times m}(K) \cong \mathrm{Pol}_{mn-1}(K) \;. \qquad \square$$

Satz 3.3.15: *Seien V und W Vektorräume über K, sei $B = \{b_i \mid i \in I\}$ eine Basis von V (wobei $b_i \neq b_j$ für $i \neq j$), und seien w_i, $i \in I$, Elemente von W (nicht notwendigerweise verschieden). Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit $f(b_i) = w_i$ für alle $i \in I$.*
Beweis: Jedes $v \in V$ hat eine eindeutige Darstellung als

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{i_j} \;.$$

Somit ist die Abbildung

$$f: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{i_j} & \mapsto & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_{i_j} \end{array}$$

eine wohldefinierte Abbildung von V nach W, mit $f(b_i) = w_i$ für alle $i \in I$. Man überzeugt sich auch leicht davon, dass f linear ist.
Ist nun $g : V \longrightarrow W$ eine andere lineare Abbildung mit $g(b_i) = w_i$ für alle $i \in I$, so gilt für jedes $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{i_j} \in V$:

$$g(v) = g(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_{i_j}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j g(b_{i_j}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_{i_j} = f(v) \ .$$

Somit haben wir $g = f$. $\square$

Wegen des obigen Satzes ist also eine lineare Abbildung vollständig und eindeutig bestimmt durch ihr Verhalten (Aktion) auf einer Basis. Zwei lineare Abbildungen sind gleich g.d.w. sie auf einer Basis übereinstimmen.

Beispiel 3.3.16: Wir betrachten die linearen Abbildungen aus Beispiel 3.3.2.

(i) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist vollständig und eindeutig bestimmt durch sein Verhalten auf der Basis $\{(1,0), (0,1)\}$: $h(1,0) = (1,1,0), h(0,1) = (1,-1,1)$.

(ii) Die Projektion $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist vollständig und eindeutig bestimmt durch $\mathrm{pr}_i(e_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker-Symbol, vgl. Def.2.1.16).

(iii) Die Ableitungsabbildung $D : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ ist bestimmt durch die Aktion auf der Basis $\{1, x, \ldots, x^n\}$: $D(x^i) = ix^{i-1}$.

(iv) Die Integralabbildung $I : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $I(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx$ ist bestimmt durch ihre Aktion auf der Basis $\{x^i \mid 0 \leq i \leq n\}$:

$$I(x^i) \ = \ \int_0^1 x^i dx \ = \ \frac{1}{i+1} x^{i+1} \Big|_0^1 \ = \ \frac{1}{i+1} \ .$$ $\square$

Der Vektorraum der Homomorphismen und der duale Raum

Satz 3.3.17: *Seien V, W Vektorräume über K, seien $g, h : V \longrightarrow W$ Homomorphismen (lineare Abbildungen), und sei $\lambda \in K$. Dann sind auch die folgenden Abbildungen linear:*

$$g + h : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ v & \mapsto & g(v) + h(v) \end{array} , \qquad \lambda h : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ v & \mapsto & \lambda h(v) \end{array} .$$

Die Menge der Homomorphismen von V nach W bildet also einen Vektorraum über K. Dabei spielt die Nullabbildung $0 : V \longrightarrow W, v \mapsto 0$ die Rolle des Nullvektors.

Definition 3.3.18: *Seien V, W Vektorräume über K. Dann ist der* **Vektorraum der Homomorphismen** *(ebenfalls über K) definiert als*

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) := \{h : V \longrightarrow W \mid h \text{ ein Homomorphismus}\}$$

mit den in Satz 3.3.17 eingeführten Verknüpfungen.

Beispiel 3.3.19: Ein Element $h \in \mathrm{Hom}_K(K^2, K)$ ist eindeutig bestimmt durch die Aktion von h auf der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$. Ist also etwa K der endliche Körper $\mathbb{Z}_p$, p eine Primzahl, so gibt es genau p Möglichkeiten für $h(1,0)$ sowie für $h(0,1)$. Der Vektorraum der Homomorphismen $\mathrm{Hom}_K(K^2, K)$ hat also genau p^2 Elemente. □

Satz 3.3.20: *Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über K, mit* $\dim(V) = m$ *und* $\dim(W) = n$. *Dann ist* $\dim(\mathrm{Hom}_K(V, W)) = mn$.

Beweis: Sei $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Basis von V und $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ eine Basis von W. Wir betrachten die (auf der Basis B definierten) linearen Abbildungen

$$\begin{array}{rccl} h_{ij}: & V & \longrightarrow & W \\ & b_i & \mapsto & c_j \\ & b_k & \mapsto & 0_W \text{ für } k \neq i \ . \end{array}$$

Also $h_{ij}(b_k) = \delta_{ik} c_j$, wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol ist.
Sei $H := \{h_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. Wir zeigen, dass H eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist.
Eine lineare Abbildung $h \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist eindeutig bestimmt durch ihre Aktion auf der Basis B, also durch

$$h(b_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} c_j \ .$$

Dann lässt sich h darstellen als

$$h = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} h_{ij} \ ,$$

denn für alle k gilt:

$$\begin{array}{rcl} h(b_k) & = & (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} h_{ij})(b_k) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} h_{ij}(b_k) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{kj} h_{kj}(b_k) \\ & = & \sum_{j=1}^{n} \mu_{kj} c_j \ . \end{array}$$

Also ist $\mathrm{span}(H) = \mathrm{Hom}_K(V, W)$.
Nun zur linearen Unabhängigkeit. Ist

$$h \ = \ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} h_{ij} \ = \ 0 \ ,$$

so gilt für alle $l \in \{1, \ldots, m\}$ auch

$$h(b_l) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} h_{ij}(b_l) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{lj} h_{lj}(b_l) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{lj} c_j = 0,$$

also $\sum_{j=1}^{n} \mu_{lj} c_j = 0$, und daher $\mu_{l1} = \cdots = \mu_{ln} = 0$. □

Beispiel 3.3.19 (Fortsetzung): Wir schreiben die Elemente von $K = \mathbb{Z}_p$ als $0, 1, \ldots, p-1$ (eigentlich sind es natürlich die Restklassen mit diesen Repräsentanten). $B = \{b_1, b_2\}$ mit $b_1 = (1, 0)$ und $b_2 = (0, 1)$ ist Basis für $\mathbb{Z}_p^2$, und natürlich ist $C = \{c_1\}$ mit $c_1 = 1$

Basis von $\mathbb{Z}_p$. Für einen Homomorphismus $h : \mathbb{Z}_p^2 \to \mathbb{Z}_p$ sei $h(1,0) = m \cdot 1 = m$ und $h(0,1) = n \cdot 1 = n$. Dann gilt für alle $(a,b) \in \mathbb{Z}_p^2$

$$h(a,b) = h(a,0) + h(0,b) = am + bn = mh_{11}(a,b) + nh_{21}(a,b).$$

Jeder Homomorphismus lässt sich also (auch eindeutig) schreiben als

$$h = mh_{11} + nh_{21} \ ,$$

und daher gilt $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p^2, \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p^2$. $\square$

Definition 3.3.21: *Sei V ein Vektorraum über K. Dann heisst*

$$V^* \ := \ \mathrm{Hom}_K(V, K)$$

der **Dualraum** *von V. Die Elemente von V^* heissen* **lineare Funktionale**.

Beispiel 3.3.22: (vgl. Beispiel 3.3.2) Die Projektionen $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und die Integralabbildung $I : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sind lineare Funktionale. $\square$

Satz 3.3.23: *Jeder Vektorraum V ist in seinen Dualraum V^* einbettbar; es gibt also einen Monomorphismus $h : V \to V^*$. Somit gilt $\dim(V) \leq \dim(V^*)$. Ist V endlichdimensional, so gilt sogar $V \cong V^*$.*

Beweis: Sei $B = \{b_i \mid i \in I\}$ eine Basis von V, wobei $b_j \neq b_k$ für $j \neq k$. Dann ist

$$\begin{array}{cccc} h: & V & \longrightarrow & V^* \\ & b_i & \mapsto & \begin{array}{cccc} \beta_i: & V & \to & K \\ & b_j & \mapsto & \delta_{ij} \end{array} \end{array}$$

der gesuchte Monomorphismus. Das sieht man aus Satz 3.3.15 und aus Satz 3.3.6 wegen $\mathrm{kern}(h) = \{0\}$. Ist nämlich

$$h(v = \sum_{i \in I' \subseteq I, I' \text{endlich}} \lambda_i b_i) \ = \ 0_{V^*} \ ,$$

dann haben wir für alle $k \in I'$

$$0 = h(v)(b_k) = \sum_{i \in I'} \lambda_i h(b_i)(b_k) = \sum_{i \in I'} \lambda_i \beta_i(b_k) = \lambda_k \ .$$

Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V (also I endlich) ist h auch ein Epimorphismus. Dazu betrachten wir ein beliebiges $g \in V^*$. Für gewisse $\lambda_i \in K$ haben wir

$$\begin{array}{cccc} g: & V & \longrightarrow & K \\ & b_i & \mapsto & \lambda_i \ . \end{array}$$

Dann wird g durch die Abbildung h getroffen; insbesondere gilt

$$g \ = \ h(\sum_{i \in I} \lambda_i b_i) \ ,$$

denn

$$h(\sum_{i \in I} \lambda_i b_i)(b_k) = \sum_{i \in I} \lambda_i h(b_i)(b_k) = \sum_{i \in I} \lambda_i \beta_i(b_k) = \lambda_k = g(b_k) \ .$$

Ist V unendlichdimensional, so ist i.a. $\operatorname{span}(h(B)) \neq V^*$. Sei etwa $I = \mathbb{N}$. Sei $g \in V^*$ so, dass für $v = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j b_j$ gilt $g(v) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j$ (natürlich sind nur endlich viele $\lambda_j \neq 0$). Dann ist $g \notin \operatorname{span}(h(B))$, denn jede Linearkombination von $h(B)$ kann nur endlich viele $h(b_i)$ enthalten; o.B.d.A. seien diese Indizes beschränkt durch k; dann ist

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i h(b_i)\right)(v) = \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i \beta_i\right)(v) = \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i \beta_i\right)(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j b_j) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_i \neq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = g(v) \ .$$

□

Definition 3.3.24: *Ist V endlichdimensional mit $\dim(V) = n$ und ist $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V, so heisst $B^* := \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ (wie in Satz 3.3.23) die zu B* **duale Basis** *(von V^*).*

Beispiel 3.3.25: Wir betrachten den Vektorraum K^n über K und die kanonische Basis $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Dann ist $B^* = \{\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_n\}$ die zu B duale Basis (von V^*). □

Lineare Abbildungen und Matrizen

Um Matrizen in Zusammenhang mit linearen Abbildungen bringen zu können, werden wir Elemente eines Vektorraums darstellen als Zeilen- oder Spaltenvektoren (bzgl. einer geordneten Basis). Dabei werden wir mit K^n immer die Menge der Zeilenvektoren der Länge n und Komponenten aus dem Körper K bezeichnen (wie auch bisher), und mit K_n die Menge der Spaltenvektoren der Länge n mit Komponenten aus K.

Definition 3.3.26: *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K mit $\dim(V) = n$. Ein n-tupel $(b_1, \ldots, b_n)$ von Elementen von V heisst eine* **geordnete Basis** *von V g.d.w. $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V ist.*
Ist $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis von V und ist $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in V$, so heisst der Spaltenvektor $(v)_B := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \in K_n$ die **Basisdarstellung** *von v bzgl. B.*

Offensichtlich gilt also für die Basisdarstellung $(v)_B$ eines Vektors $v \in V$:

$$v = B \cdot (v)_B \ .$$

Seien nun V und W Vektorräume über K mit $\dim(V) = m$ und $\dim(W) = n$. Sei weiters $B = (b_1, \ldots, b_m)$ eine geordnete Basis von V und sei $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine geordnete Basis von W. Eine lineare Abbildung $h \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist eindeutig bestimmt durch ihre Aktion auf B, also etwa durch die Darstellung von $h(B)$ bzgl. der Basis C:

$$\begin{array}{rcccccccc} h(b_1) & = & a_{11}c_1 & + & a_{12}c_2 & + & \cdots & + & a_{1n}c_n \\ h(b_2) & = & a_{21}c_1 & + & a_{22}c_2 & + & \cdots & + & a_{2n}c_n \\ & \vdots & & & & & & & \\ h(b_m) & = & a_{m1}c_1 & + & a_{m2}c_2 & + & \cdots & + & a_{mn}c_n \ . \end{array} \qquad (*)$$

Somit entspricht jeder linearen Abbildung h eindeutig eine Matrix bestehend aus den Linearkoeffizienten a_{ij}. Für diese Koeffizienten gilt

$$h(b_i)_C \ = \ \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \ .$$

Definition 3.3.27: *Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über K, $B \in V^m$ eine geordnete Basis von V und $C \in W^n$ eine geordnete Basis von W, und sei $h \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Die Transponierte der Matrix in $(*)$, also die $n \times m$-Matrix*

$$\mathcal{A}(h, B, C) \ := \ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ,$$

*heisst die (***Darstellungs-***)* **Matrix** *von h bzgl. der geordneten Basen B und C.*

Beispiel 3.3.28:

(i) Sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert als

$$h(x, y, z) = (2x - 3y + z, 3x - 2y) \ .$$

Die Aktion von h auf der geordneten kanonischen Basis

$$B = (\,(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\,)$$

von $\mathbb{R}^3$ sieht, dargestellt bzgl. der geordneten Basis

$$C = (\,(1, 0),\ (0, 1)$$

von $\mathbb{R}^2$ wie folgt aus:

$$\begin{array}{lclcl} h(1,0,0) & = & (2,3) & = & 2(1,0) + 3(0,1) \\ h(0,1,0) & = & (-3,-2) & = & -3(1,0) - 2(0,1) \\ h(0,0,1) & = & (1,0) & = & 1(1,0) + 0(0,1) \end{array}$$

Die Darstellungmatrix ist also

$$\mathcal{A}(h, B, C) \ = \ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Offensichtlich gilt für einen beliebigen Vektor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(h(v))_C \ = \ \mathcal{A}(h, B, C) \cdot (v)_B \ .$$

(ii) Sei $D : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ die in Beispiel 3.3.2 (iii) definierte Differentiationsabbildung. In $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ betrachten wir die geordnete Basis

$$B \ = \ (1, x, x^2, \ldots, x^n) \ .$$

Die Darstellungmatrix ist

$$\mathcal{A}(D, B, B) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Für ein beliebiges Polynom $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_n x^n$ gilt

$$(D(a))_B \ = \ (a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1})_B \ = \ \mathcal{A}(D, B, B) \cdot (a)_B \ . \qquad \square$$

Satz 3.3.29: *Mit den Bezeichnungen wie in Def.3.3.27 gilt für alle $v \in V$:*

$$(h(v))_C \;=\; \mathcal{A}(h, B, C) \cdot (v)_B \;.$$

Beweis: Wie man sich leicht überzeugt (vgl. Bemerkung vor Def.3.3.27) gilt dieser Zusammenhang für alle Basiselemente b_i, und somit wegen der Linearität für alle $v \in V$. □

Korollar: *Für die kanonischen geordneten Basen B bzw. C in K_m bzw. K_n, eine lineare Abbildung $h \in \mathrm{Hom}_K(K_m, K_n)$, und einen beliebigen Vektor $v \in K_m$ gilt:*

$$h(v) \;=\; \mathcal{A}(h, B, C) \cdot v \;. \qquad (*)$$

Eine analoge Beziehung gilt für Zeilenvektoren, nur muss man dann in $(*)$ jeweils die transponierten Vektoren (also Spaltenvektoren) einsetzen.

Satz 3.3.30: *Seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume über K, $B \in U^m$ eine geordnete Basis von U, $C \in V^n$ eine geordnete Basis von V und $D \in W^p$ eine geordnete Basis von W, und seien $f, g \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$, $h \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, und weiters $\lambda \in K$. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{A}(f + g, B, C) = \mathcal{A}(f, B, C) + \mathcal{A}(g, B, C)$;

(ii) $\mathcal{A}(\lambda f, B, C) = \lambda \mathcal{A}(f, B, C)$;

(iii) $\mathcal{A}(h \circ f, B, D) = \mathcal{A}(h, C, D) \cdot \mathcal{A}(f, B, C)$;

(iv) *f ist ein Isomorphismus g.d.w. $\mathcal{A}(f, B, C)$ invertierbar (regulär) ist. In diesem Fall gilt auch $\mathcal{A}(f^{-1}, C, B) = \mathcal{A}(f, B, C)^{-1}$.*

Ein Homomorphismus $f : U \to V$ ist also ein Isomorphismus g.d.w. die Darstellungsmatrix **regulär** bzw. invertierbar ist. Eine nicht invertierbare Matrix heisst auch **singulär**.

Beweis: ad (i): Seien

$$\mathcal{A}(f, B, C) = (x_{ij})_{n \times m} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}(g, B, C) = (y_{ij})_{n \times m} \;.$$

Somit haben wir (beachte die Umkehrung der Indizes)

$$f(b_i) = \sum_{j=1}^{n} x_{ji} c_j \quad \text{und} \quad g(b_i) = \sum_{j=1}^{n} y_{ji} c_j \;.$$

Also

$$(f + g)(b_i) = \sum_{j=1}^{n} (x_{ji} + y_{ji}) c_j \;,$$

und somit haben wir $\mathcal{A}(f + g, B, C) = \mathcal{A}(f, B, C) + \mathcal{A}(g, B, C)$.
ad (ii): Offensichtlich gilt

$$(\lambda f)(b_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda x_{ji} c_j$$

und somit haben wir $\mathcal{A}(\lambda f, B, C) = \lambda \mathcal{A}(f, B, C)$.
ad (iii): Wegen Satz 3.3.29 gilt

$$\mathcal{A}(h \circ f, B, D) \cdot (v)_B = (h(f(v)))_D = \mathcal{A}(h, C, D) \cdot (f(v))_C = \mathcal{A}(h, C, D) \cdot \mathcal{A}(f, B, C) \cdot (v)_B \ .$$

Diese Beziehung gilt insbesondere auch für die Elemente der Basis B. Aus $v = b_i$ sieht man, dass die i-te Spalte von $\mathcal{A}(h \circ f, B, D)$ und $\mathcal{A}(h, C, D)\mathcal{A}(f, B, C)$ übereinstimmen. Also gilt

$$\mathcal{A}(h \circ f, B, D) \ = \ \mathcal{A}(h, C, D) \cdot \mathcal{A}(f, B, C) \ .$$

ad (iv): Sei $f : U \to V$ ein Isomorphismus. Dann gibt es auch einen Isomorphismus $f^{-1} : V \to U$. Es gilt also

$$\mathcal{A}(f^{-1}, C, B) \cdot \mathcal{A}(f, B, C) \ = \ \mathcal{A}(\mathrm{id}_U, B, B) \ = \ I_m \ .$$

Somit ist $\mathcal{A}(f^{-1}, C, B)$ die Inverse zu $\mathcal{A}(f, B, C)$.
Sei andererseits die Darstellungsmatrix $\mathrm{Mat}(f, B, C)$ invertierbar. Dann muss natürlich gelten $m = n$. Die Inverse M repräsentiert natürlich auch eine lineare Abbildung $f' : V \to U$. Die Hintereinanderausführung von f und f' hat die Einheitsmatrix I_m als Darstellungsmatrix, sie ist also die identische Abbildung. Somit ist f ein Isomorphismus.
□

Satz 3.3.31: *Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über K, $\dim(V) = m$, $\dim(W) = n$, und seien B, C geordnete Basen. Dann ist die Zuordnung*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{mat}: & \mathrm{Hom}_K(V, W) & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{n \times m}(K) \\ & h & \mapsto & \mathcal{A}(h, B, C) \end{array}$$

ein Vektorraumisomorphismus von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ nach $\mathrm{Mat}_{n \times m}(K)$.

Beweis: Sowohl $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ als auch $\mathrm{Mat}_{n \times m}(K)$ sind Vektorräume über K der Dimension mn. mat ist wegen Satz 3.3.30 eine lineare Abbildung. mat ist offensichtlich injektiv, und mit Satz 3.3.9 auch bijektiv, also ein Isomorphismus. □

Basistransformation

Wir haben bisher untersucht, wie wir für fix bewählte Basen B bzw. C der Vektorräume V bzw. W eine lineare Abbildung $h : V \to W$ durch eine Matrix darstellen können. Wie aber verändert sich die Darstellungsmatrix, wenn wir neue Basen B' bzw. C' wählen? Damit wollen wir uns nun befassen.

Definition 3.3.32: *Seien B und B' Basen des m-dimensionalen Vektorraums V über K. Dann heisst*

$$\mathcal{A}^B_{B'} \ := \ \mathcal{A}(\mathrm{id}, B, B')$$

die **Basistransformationsmatrix** *von B nach B'.*

Satz 3.3.33: *Seien B und B' Basen des m-dimensionalen Vektorraums V über K. Dann gilt:*

(i) *für alle $v \in V$: $(v)_{B'} = \mathcal{A}^B_{B'} \cdot (v)_B$;*

$$\begin{tikzcd}
V = \langle B \rangle \arrow[r, "h;\ \mathcal{A}(h,B,C)"] & W = \langle C \rangle \arrow[d, "\mathrm{id};\ \mathcal{A}_{C'}^{C}"] \\
V = \langle B' \rangle \arrow[u, "\mathrm{id};\ \mathcal{A}_{B}^{B'}"] \arrow[r, "h;\ \mathcal{A}(h,B',C')"'] & W = \langle C' \rangle
\end{tikzcd}$$

Fig. 3.3.1: Darstellungstransformation

(ii) $\mathcal{A}_{B'}^{B}$ *ist invertierbar (regulär) und zwar* $\left(\mathcal{A}_{B'}^{B}\right)^{-1} = \mathcal{A}_{B}^{B'}$;

(iii) $\mathcal{A}_{B'}^{B} = I_m$ *g.d.w.* $B = B'$.

Beweis: ad (i): unmittelbare Konsequenz von Satz 3.3.29.
ad (ii): wegen (i) gilt

$$(v)_B = \left(\mathcal{A}_{B}^{B'}\right) \cdot \mathcal{A}_{B'}^{B} \cdot (v)_B \quad \text{für alle } v \in V \ .$$

Also gilt für alle $x \in K^m$

$$x = I_m \cdot x = \left(\mathcal{A}_{B}^{B'}\right) \cdot \mathcal{A}_{B'}^{B} \cdot x \ .$$

Somit ist $\mathcal{A}_{B}^{B'} = \left(\mathcal{A}_{B'}^{B}\right)^{-1}$.
ad (iii): Aus $B = B'$ folgt natürlich $\mathcal{A}_{B'}^{B} = I_m$. Gilt andererseits die linke Seite, so haben wir für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$(b_i)_{B'} = \mathcal{A}_{B'}^{B}(b_i)_B = \mathcal{A}_{B'}^{B} e_i = e_i = (b_i)_B \ ,$$

also $b_i = b_i'$. □

Beispiel 3.3.34: Sei $B = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ und sei B' die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\mathcal{A}_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_{B}^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Koordinaten von $v = (1,2,3)$ bzgl. B sind gegeben durch

$$(v)_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (v)_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} . \qquad \square$$

Wir kehren nun zum oben beschriebenen Problem zurück: wie verändert sich die Darstellungsmatrix eines Homomorphismus $h : V \to W$, wenn wir die Basen der Vektorräume ändern? Die Situation stellt sich dar wie in Fig. 3.3.1.

Satz 3.3.35: *Seien B und B' geordnete Basen des m-dimensionalen Vektorraums V über K, und seien C und C' geordnete Basen des n-dimensionalen Vektorraums W über K. Sei $h: V \to W \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Dann gilt für die Darstellungsmatrizen:*

$$\mathcal{A}(h, B', C') = \mathcal{A}_{C'}^{C} \cdot \mathcal{A}(h, B, C) \cdot \mathcal{A}_{B}^{B'} \; .$$

Beweis: Durch die Multiplikation mit $\mathcal{A}_B^{B'}$ wird die Darstellung eines Basisvektors b_i' in B' transformiert in die Darstellung bzgl. B; durch die Multiplikation mit $\mathcal{A}(h, B, C)$ wird $h(b_i')$ dargestellt bzgl. der Basis C; durch die Multiplikation mit $\mathcal{A}_{C'}^{C}$ wird schliesslich $h(b_i')$ dargestellt bzgl. der Basis C'. □

Beispiel 3.3.36: Als Beispiel betrachten wir die Differentiationsabbildung

$$\begin{array}{rlcl} D: & \mathrm{Pol}_4(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \\ & p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 & \mapsto & p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \end{array} \; .$$

Als Basen von $\mathrm{Pol}_4(\mathbb{R})$ betrachten wir

$$B = (1, x, x^2, x^3, x^4) \quad \text{und} \quad B' = (1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), x(x-1)(x-2)(x-3)) \; ,$$

und als Basen von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ betrachten wir

$$C = (1, x, x^2, x^3) \quad \text{und} \quad C' = (1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)) \; .$$

Es ist klar, wie wir aus der Darstellung eines Polynoms p bzgl. B die Darstellung von $D(p) = p'$ bzgl. C bekommen. Wie aber ergibt sich aus der Darstellung von p bzgl. B' die Darstellung von $D(p) = p'$ bzgl. C'?
Offensichtlich können wir die Basistransformationsmatrix von B' nach B sofort angeben, als Inverse davon erhalten wir die Basistransformationsmatrix von B nach B'. Ebenso für die Basen C und C'. Dabei erhalten wir die folgenden Basistransformationsmatrizen:

$$\mathcal{A}_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; , \quad \mathcal{A}_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ,$$

$$\mathcal{A}_C^{C'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; , \quad \mathcal{A}_{C'}^{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

Die Darstellungsmatrix der Differentialabbildung D bzgl. der Basen B und C ist

$$\mathcal{A}(D, B, C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \; .$$

Mittels Satz 3.3.35 berechnet sich daraus die Darstellungsmatrix von D bzgl. der Basen B' und C' als

$$\mathcal{A}(D, B', C') = \mathcal{A}^{C}_{C'} \cdot \mathcal{A}(D, B, C) \cdot \mathcal{A}^{B'}_{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

Wir überprüfen das Ergebnis am Polynom $p(x) = x^2 + 2x^3 - x^4$.

$$(p)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \; , \quad (p)_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \; , \quad (D(p))_{C'} = \mathcal{A}(D, B', C') \cdot (p)_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad ,$$

also $D(p) = 4c_2' - 6c_3' - 4c_4' = 2x + 6x^2 - 4x^3$. □

Satz 3.3.37: *Sei B eine geordnete Basis des m-dimensionalen Vektorraums V über K, und sei C eine geordnete Basis des n-dimensionalen Vektorraums W über K. Seien $X, Y \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$, und seien P, Q invertierbare Matrizen, sodass gilt $Y = Q^{-1}XP$. Dann gibt es geordnete Basen B' bzw. C' von V bzw. W und eine lineare Abbildung $h : V \to W$, sodass*

$$X = \mathcal{A}(h, B, C) \quad \text{und} \quad Y = \mathcal{A}(h, B', C') \; .$$

Beweis: Für $P = (p_{ij})_{m\times m}$ und $Q = (q_{ij})_{n\times n}$ setzen wir

$$\begin{array}{rcll} b_i' & := & \sum_{j=1}^{m} p_{ji} b_j & \quad \text{für} 1 \le i \le m, \\ c_i' & := & \sum_{j=1}^{n} q_{ji} c_j & \quad \text{für} 1 \le i \le n. \end{array}$$

Da P invertierbar ist, gibt es wegen Satz 3.3.30(iv) einen Isomorphismus $f_p : V \to V$, welcher bzgl. der Basis B die Darstellungsmatrix P hat. Laut Definition ist $b_i' = f_p(b_i)$ für alle i; also ist $B' := (b_i')_{1\le i\le m}$ eine geordnete Basis für V und P ist die Basistransformationsmatrix von B' nach B.
Analog sieht man, dass $C' := (c_i')_{1\le i\le n}$ eine geordnete Basis für W ist und Q die Basistransformationsmatrix von C' nach C.
Ist nun $h : V \to W$ die lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix X bzgl. B und C, dann ist wegen Satz 3.3.35 die Darstellungsmatrix von h bzgl. B' und C' gegeben durch $Y = Q^{-1}XP$. □

Aus Satz 3.3.35 und Satz 3.3.37 sehen wir, dass der Rang einer Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung h unabhängig ist von der Wahl der Basen. Das gibt Anlass zu folgender Definition.

Definition 3.3.38: *Sei $h : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen Vektorräumen V und W. Der* **Rang** *von h ist der Rang einer Darstellungsmatrix (bzgl. beliebiger Basen) von h.*

Als unmittelbare Folgerung von Satz 3.3.35 sehen wir, dass für $h \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ und geordnete Basen B und B' von V gilt:

$$\mathcal{A}(h, B', B') = \mathcal{A}_{B'}^{B} \cdot \mathcal{A}(h, B, B) \cdot \left(\mathcal{A}_{B'}^{B}\right)^{-1} \ .$$

Dadurch ist die folgende Definition motiviert.

Definition 3.3.39: *Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. B heisst* **ähnlich** *oder* **konjugiert** *zu A, in Zeichen $B \sim A$, wenn es eine invertierbare Matrix P gibt, sodass $B = P^{-1}AP$.*

Man prüft leicht nach, dass diese Ähnlichkeitsrelation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Satz 3.3.40: *Zwei $n \times n$ Matrizen A und B sind ähnlich g.d.w. sie dieselbe lineare Abbildung darstellen, eventuell bzgl. verschiedener geordneter Basen.*

Beweis: Das ist eine unmittelbare Folge von Satz 3.3.35 und Satz 3.3.37, indem man $V = W$ wählt und $b_i = c_i$ und $b_i' = c_i'$ für alle i. □

Basistransformationsmatrizen sind also invertierbare $n \times n$-Matrizen. Andererseits tranformiert jede invertierbare Matrix Basen in Basen (vgl. Satz 3.3.9). Da invertierbare Matrizen auf diese Weise sehr eng mit linearen Abbildungen zusammenhängen, nennt man die Gruppe der invertierbaren Matrizen zusammen mit der Matrizenmultiplikation die allgemeine lineare Gruppe (general linear group).

Definition 3.3.41: *Die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über dem Körper K heisst die* **allgemeine lineare Gruppe** *(***general linear group***) vom Grad n über K, und sie wird bezeichnet mit $GL_n(K)$.*

3.4 Lie-Algebren

Lie-Algebren sind Vektorräume mit einer zusätzlichen inneren Verknüpfung, die gewisse Eigenschaften besitzen muss. Sie spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Wir geben hier nur eine sehr kurze Einführung in Lie-Algebren, und stützen uns dabei auf die Darstellung in Wikipedia.

Definition 3.4.1: *Eine* **Lie-Algebra**[1] *ist ein Vektorraum L über einem Körper K zusammen mit einer inneren Verknüpfung, der* **Lie-Klammer**,

$$[\cdot,\cdot]: \begin{array}{ccc} L\times L & \longrightarrow & L \\ (x,y) & \mapsto & [x,y] \end{array} ,$$

für welche gilt für alle $a,b\in K$ und alle $x,y,z\in L$:

(i) $[ax+by,z]=a[x,z]+b[y,z]$ *und* $[x,ay+bz]=a[x,y]+b[x,z]$
(also $[\cdot,\cdot]$ is bilinear, d.h. linear in beiden Komponenten)

(ii) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$
(Jacobi-Identität)

(iii) $[x,x]=0$.

(i) und (iii) zusammen implizieren die Antisymmetrie $[x,y]=-[y,x]$ für alle $x,y\in L$. Lie-Klammern sind im allgemeinen nicht assoziativ, d.h. $[[x,y],z]$ muss nicht gleich $[x,[y,z]]$ sein.

Beispiel 3.4.2: Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ bildet eine Lie-Algebra, wenn man die Lie-Klammer als das Kreuzprodukt interpretiert. Also für

$$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

ist die Lie-Klammer definiert als

$$[a,b]:=a\times b=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\-a_1b_3+a_3b_1\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix} .$$

Zu zwei Vektoren a,b erhält man mittels Kreuzprodukt einen Vektor $c=a\times b$, der senkrecht auf die von a und b aufgespannte Ebene steht. Der Betrag diese Vektors ist gleich dem Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms. □

Beispiel 3.4.3: Die Matrizen $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ bilden einen Vektorraum über K. Der Vektorraum der $n\times n$-Matrizen über K wird zu einer Lie-Algebra durch die Wahl des Kommutators als Lie-Klammer:

$$[A,B]:=AB-BA .$$

Beachte, dass die Multiplikation von Matrizen nicht kommutativ ist. □

[1] benannt nach Sophus Lie (1842–1899)

Beispiel 3.4.4: Die allgemeine lineare Lie-Algebra für einen Vektorraum V über K ist die Lie-Algebra der Endomorphismen von V mit dem Kommutator als Lie-Klammer, also

$$[f, g] := f \circ g - g \circ f \ .$$

$\square$

Wir bemerken, dass jedem Endomorphismus des n-dimensionalen Vektorraums V eine quadratische $n \times n$-Matrix als Darstellungsmatrix entspricht. Also sind Beispiel 3.4.3 und Beispiel 3.4.4 nur zwei verschiedene Sichtweisen auf ein und denselben Sachverhalt.