Übungen Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) Wintersemester 2018/19

Übungsblatt 10

Besprechung am **17. 1. 2019**

Aufgabe 1. Beweisen Sie Satz 6.5 aus der Vorlesung: Seien $I = (a, b)$ ein Intervall und $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Dann ist auch die Summe $f + g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig.[1]

Aufgabe 2. Beweisen Sie Satz 6.6 aus der Vorlesung: Seien $I = (a, b)$ und $J = (c, d)$ Intervalle. Seien $f\colon I \to J$ und $g\colon J \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Dann ist auch die Komposition $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig.[2]

Aufgabe 3. Benutzen Sie das Bisektionsverfahren aus dem Beweis vom Zwischenwertsatz in der Vorlesung um eine Lösung von

$$113x^3 - 355x^2 + 113x - 355$$

bis auf 3 Nachkommastellen genau zu bestimmen. (Wenn Sie ein Programm schreiben, geben Sie mindestens 8 richtige Stellen an!)

(Hinweis: Plotten Sie die Funktion um ein möglichst kleines Startinterval zu bestimmen.)

Aufgabe 4. Seien (a, b) und (c, d) Intervalle, und seien $f\colon (a, b) \to (c, d)$ sowie $g\colon (c, d) \to \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Sind $g \circ f$ und f stetig, so ist auch g stetig.

b) Sind $g \circ f$ und g stetig, so ist auch f stetig.

Aufgabe 5. Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind:

a) $f(x) = a$, wobei $a \in \mathbb{R}$;

b) $g(x) = x$;

c) $h(x) = \sqrt[3]{x} - 2x$;

d) $k(x) = (x^2 + 1)^{-1}$.

Aufgabe 6. Seien (a, b) ein Intervall und $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen, wobei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gelte. Zeigen Sie, dass die rationale Funktion f/g stetig ist.

Aufgabe 7. Beweisen Sie: Jede Polynomfunktion ungeraden Grades hat eine Nullstelle.

Bonusaufgabe. Eine Funktion $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$ für alle $x, y \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass Lipschitz-stetige Funktionen stetig sind!

---

[1] Wie üblich ist die Summe definiert als $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

[2] Wie üblich ist die Komposition definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.