Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
9. Übungsblatt für den 10. 12. 2018

61. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit

$$(1,0,0) \mapsto (1,0,1,1), \quad (0,1,0) \mapsto (0,1,1,1), \quad (0,0,1) \mapsto (1,-1,0,0).$$

   (a) Ist f dadurch eindeutig bestimmt?

   (b) Bestimmen Sie $\dim(Im(f))$ und eine Basis von $Im(f)$.

   (c) Bestimmen Sie den Faktorraum $\mathbb{R}^4/Im(f)$ und eine Basis hiervon.

   (d) Sei $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}$. Bestimmen Sie $\dim(U), f(U), \dim(f(U))$ und eine Basis von $f(U)$.

   (e) Ist f ein Monomorphismus?

62. Sei $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Dann ist der Differentialoperator

$$d : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), f(x) \mapsto f'(x)$$

ein Endomorphismus.

   (a) Berechnen Sie $\ker(\frac{d}{dx})$.

   (b) Wenden Sie den Homomorphiesatz an und geben Sie explizit den dadurch vorhergesagten Isomorphismus an.

   (c) Geben Sie auch den inversen Isomorphismus explizit an.

63. Sei W der von den Funktionen $b_0(x) := 1, b_1(x) := x, b_2 := x^2$ aufgespannte Teilraum von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ und d wie in 61.

   (a) Zeigen Sie, dass $B = \{b_0, b_1, b_2\}$ eine Basis von W bildet.

   (b) Zeigen Sie $d(W) \subset W$.

   (c) Berechnen Sie $\mathcal{A}(d, B, B)$.

64. Die Vektoren $b_1 = (0,1,3)^T, b_2 = (1,2,1)^T, b_3 = (0,0,1)^T$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

   (a) Bestimmen Sie die zu $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ duale Basis B^*.

   (b) Sei $a = (1,2,3) \in (\mathbb{R}^3)^*$. Bestimmen Sie die Koordinaten von a bzgl. B^*.

65. Gegeben sei eine Abbildung

$$f : Pol_2(\mathbb{R}) \to Pol_2(\mathbb{R}), \ p(x) \mapsto p(2x-1).$$

   (a) Bestimmen Sie die zu f gehörende Abbildungsmatrix bzgl. der Basis $\{1, x, x^2\}$ von $Pol_2(\mathbb{R})$.

   (b) Berechnen Sie $f(1+2x+x^2)$ einerseits unter Verwendung der Abbildungsmatrix und andererseits direkt.

66. Sei $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $v \in \mathbb{K}^n$ mit einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ sodass $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ linear unabhängig und $v, Av, \ldots, A^n v$ linear abhängig sind.

    (a) Geben Sie eine nicht-triviale Basis des Vektorraums $\mathbb{K}^n$ (über $\mathbb{K}$) an.

    (b) Geben Sie die Darstellungsmatrix von A bezüglich dieser Basis an.

67. Es seien A und B ähnliche Matrizen. Wir definieren die Exponentialmatrix von A (genauso von B) als

$$\exp(A) = \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

    Zeigen Sie, dass auch $\exp(A)$ und $\exp(B)$ ähnliche Matrizen sind.

68. Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}^3$ das Kreuzprodukt $a \times b$ wirklich eine Lie-Algebra definiert. (vgl. Bsp. 3.4.2 im Skript)