Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
8. Übungsblatt für den 3. 12. 2018

53. Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$, $W = \mathrm{Span}(v_1)$ der von v_1 erzeugte Teilraum von $\mathbb{R}^3$. Man zeige oder widerlege: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodaß $v_3 + W = \lambda v_2 + W$.

54. Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + y)$. Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ so, dass $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ ist.

55. Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}$ die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Kern der linearen Abbildung

$$f\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2} \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}, \; X \mapsto A \cdot X.$$

56. Es bezeichne V den reellen Vektorraum $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

   (a) Die Abbildung $I\colon V \longrightarrow V$, $I(f)(x) := \int_a^x f(t)dt$ ist linear.

   (b) Bestimmen Sie den Kern von I.

57. Der Homomorphiesatz für lineare Abbildungen (Satz 3.3.11) lautet: Ist $f\colon V \longrightarrow W$ linear dann gilt $V/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f)$. Schreiben Sie einen Beweis für diesen Satz an, indem Sie zeigen, dass

$$i\colon V/\ker(f) \longrightarrow \mathrm{im}(f), \; v + \ker(f) \mapsto f(v)$$

wohldefiniert, und der gesuchten Isomorphismus ist.

58. Beweisen Sie Satz 3.3.7:

> Seien V und W endlich dimensionale Vektorräume über demselben Körper K, und sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt
>
> $$\dim(V) = \dim(\mathrm{im}(f)) + \dim(\ker(f)).$$

Hinweis: Starten Sie mit einer Basis von $\mathrm{im}(f)$ und fügen Sie deren Urbild mit einer Basis von $\ker(f)$ zusammen.

59. Im $\mathbb{R}^5$ sind die Teilräume

$$U_1 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 - x_4 + x_5 = 0 \;\wedge\; x_2 + 3x_4 - x_5 = 0\}$$
$$U_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_3 + x_4 + 5x_5 = 0\}$$

gegeben. Berechnen Sie eine Basis von U_1 und eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

60. Es seien $f_0, f_1, \ldots, f_n$ Polynome mit $\deg(f_k) = k$ $(0 \leq k \leq n)$. Zeigen Sie, dass $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ eine Basis des Vektorraums $\mathrm{Pol}_n(K)$ der Polynome vom Grad $\leq n$ ist.