Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
7. Übungsblatt für den 26. 11. 2018

45. Gegeben sind die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, A_3 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, A_5 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A_6 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & -6 & -18 \end{pmatrix},$$

$$A_7 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Elementarmatrizen, die jeweils A_i in A_{i+1} überführen ($i \in \{1, \ldots, 6\}$).

46. Seien $E_1, \ldots, E_n \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ Elementarmatrizen. Zeigen Sie, dass das Produkt der Matrizen $P = E_n E_{n-1} \ldots E_1$ invertierbar ist. (Hinweis: Konstruieren Sie P^{-1} mit Hilfe der E_i und begründen Sie die Korrektheit).

47. Entscheiden Sie, ob die Matrizen A und B invertierbar sind. Wenn ja, geben Sie die dazugehörige Inverse an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

48. Gegeben ist die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie invertierbare Matrizen P und Q so, dass $P \cdot A \cdot Q$ die Normalform von A ergibt.

Hinweis: Wenden Sie auf das Schema $\begin{array}{c|c} I_3 & \\ \hline A & I_3 \end{array}$ elementare Zeilen- und Spaltenoperationen an.

49.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie alle Lösungen X des linearen Gleichungssystems $A \cdot X = b$.

50. Gegeben sei $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Z})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein $B \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Z})$ mit $B \neq 0_{3\times 3}$ für die $A \cdot B = 0_{3\times 3}$ gilt.

51. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ so definiert, dass $A_{i,j} = 0$ falls $i \neq j$ und $A_{i,i} = c$, $c \in \mathbb{R}$. (A ist also jene Matrix welche in der Hauptdiagonale überall den Eintrag c hat und sonst überall Eintrag 0 hat). Sei B eine beliebige Matrix in $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie dass $A \cdot B = B \cdot A$. (Hinweis: Zeigen Sie $(A \cdot B)_{n,m} = (B \cdot A)_{n,m}$ für n, m beliebig aus $\{1, \ldots, n\}$.)

52. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V, die mit Addition und Skalarmultiplikation verträglich ist (eine `Kongruenzrelation`). Zeigen Sie, dass es einen Unterraum $W \subseteq V$ gibt, dessen auf V induzierte Äquivalenzrelation $\sim_W$ mit $\sim$ übereinstimmt. Die Räume V/W, wobei W alle Unterräume von V durchläuft, sind also alle möglichen Faktorräume von V.