

**Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
6. Übungsblatt für den 19. 11. 2018**

37. Zeigen Sie (ii) und (iii) aus Satz 2.1.23: Für Matrizen A, B, C gilt, falls definiert,

(a) $(A(B + C))^T = B^T A^T + C^T A^T$

(b) $(A^n)^T = (A^T)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

38. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Zerlegen Sie die Matrix in die Summe einer symmetrischen und einer schief-symmetrischen Matrix.

(b) Berechnen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Matrix A^n und beweisen Sie die Formel per Induktion.

39. (a) Zeigen Sie, dass Rotationsmatrizen orthogonal sind, also dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$R_\alpha R_\alpha^T = I_2 = R_\alpha^T R_\alpha.$$

(b) Berechnen Sie die Ellipsengleichung $x^2 + 4y^2 = 1$ nach einer Drehung um 30° .

40. Seien A, B reelle 2×2 - Matrizen. Welche Bedingungen müssen deren Einträge erfüllen, damit diese kommutieren, also $AB = BA$ gilt?

41. Für reelle $n \times n$ -Matrizen A und B ist der Kommutator definiert als $[A, B] = AB - BA$.

(a) Zeigen Sie für alle A, B, C die Identität

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

(b) Berechnen Sie die Kommutatoren $[A, B], [A, C], [B, C]$ für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

42. Bringen Sie folgendes System linearer Gleichungen in Matrixschreibweise und lösen Sie es mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens

$$\begin{aligned} 2y - 3x &= 1 \\ 12 + z &= 3x - y \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

43. Berechnen Sie in Abhängigkeit des Wertes $a \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

44. Ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

konsistent? Berechnen Sie die Lösungsmenge in \mathbb{R} nach Streichen der letzten Zeile bzw. Gleichung und zeichnen Sie diese.