Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
5. Übungsblatt für den 5. 11. 2018

30. Sei $f : A \to B$ eine Funktion. In Beispiel 29 haben wir gesehen, dass $x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$ eine Äquivalenzrelation auf A definiert. Zeigen Sie, dass

$$F : A_{/\sim} \to f(A),\ K_\sim(x) \mapsto f(x)$$

eine bijektive Funktion beschreibt.
Achtung, zeigen Sie dass F tatsächlich eine Funktion ist.

31. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ abzählbar sind (Satz 1.4.52).

32. Sei R ein Ring mit Einselement. Finden Sie das Einselement im Ring der formalen Potenzreihen $R[[x]]$ (siehe Bsp. 1.5.30). Finden Sie die inversen Elemente von $R[[x]]$ anhand der Definition der Multiplikation und mittels Koeffizientenvergleich.

33. Sei $A_n = \{e^{2\pi ik/n} \mid k = 0, \ldots, n-1\}$ für $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Zeigen Sie, dass $(A_n, \cdot)$ mit der Multiplikation für komplexe Zahlen eine Gruppe bildet. Ist sie auch zyklisch?
   (b) Sei n ein Teiler von m. Zeigen Sie, dass dann $(A_n, \cdot)$ eine Untergruppe von $(A_m, \cdot)$ bildet. Gilt auch $A_n \trianglelefteq A_m$?
   (c) Berechnen Sie die Faktorgruppe A_m/A_n.

34. Sei $G = (\mathbb{Z}, +)$ und $H = (\{1, i, -1, -i\}, \cdot)$, wobei i der imaginären Einheit entspricht. Wir definieren die Abbildung $\psi : G \to H$ durch $\psi(n) := i^n$.
   (a) Ist ψ ein Homomorphismus?
   (b) Bestimmen Sie $\mathrm{kern}(\psi)$ und $\mathrm{im}(\psi)$.
   (c) Geben Sie einen Ismomorphismus zwischen $G/\mathrm{kern}(\psi)$ und $\mathrm{im}(\psi)$ an.

35. Sei I ein Integritätsbereich und $Q(I)$ dessen Quotientenkörper.
   (a) Bestimmen Sie das neutrale Element bzgl. Addition bzw. Multiplikation in $Q(I)$.
   (b) Zeigen Sie, dass die Addition und Multiplikation auf $Q(I)$ wohldefiniert sind, also dass sie Funktionen von $Q(I) \times Q(I)$ nach $Q(I)$ sind.

Seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, *, \times)$ Ringe mit Einselement 1 und $1'$. Dann heit eine Abbildung $\phi : R \to S$ *Ringhomomorphismus*, falls für alle $r \in R, s \in S$

1. $\phi(r + s) = \phi(r) * \phi(s)$
2. $\phi(r \cdot s) = \phi(r) \times \phi(s)$
3. $\phi(1) = 1'$

gilt.

36. Seien I und $Q(I)$ wie in Bsp. 35. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : I \to Q(I),\ x \mapsto x/1$$

ein injektiver Ringhomomorphismus ist.