Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
4. Übungsblatt für den 29. 10. 2018

23. Beweisen Sie die folgende Aussage (Satz 1.4.22):

    (a) Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge A. Dann bilden die verschiedenen Äquivalenzklassen eine Partition $P_\sim$ von A.

    (b) Sei $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ eine Partition von A. Dann ist die Relation $\sim$ mit

    $$a \sim b :\iff A \text{ und } b \text{ liegen im selben } A_i$$

    eine Äquivalenzrelation auf A.

    (c) Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\sim \mapsto P_\sim$ eine bijektive Abbildung der Menge aller Äquivalenzrelationen auf A auf die Menge aller Partitionen von A ist.

24. Beweisen Sie die Aussage des Satzes 1.4.27:

    Sei M eine Menge, und $L = \mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Die Relation

    $$A \leq B :\iff A \subseteq B$$

    ist eine Ordnungsrelation of L (die im allgemeinen nicht linear ist).

25. Beweisen Sie Satz 1.4.40:

    Seien $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow C$ und $h\colon C \longrightarrow D$ Funktionen. Dann gilt:

    (a) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (Assoziativität);

    (b) f und g beide injektiv (surjektiv, bijektiv) $\Rightarrow g \circ f$ injektiv (surjektiv, bijektiv).

    (c) Zu f gibt es höchstens eine inverse Funktion.

    (d) f besitzt genau dann eine inverse Funktion f^{-1}, wenn f bijektiv ist. In diesem Fall ist auch f^{-1} bijektiv.

    (e) Wenn f bijektiv ist, dann ist $(f^{-1})^{-1} = f$.

    (f) f und g beide bijektiv $\Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

26. Und dasselbe auch noch für Satz 1.4.41: Sei $f\colon A \longrightarrow B$ eine Funktion.

    (a) f ist injektiv g.d.w. für alle Funktionen $g, h\colon C \longrightarrow A$ gilt:

    $$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h.$$

    (b) f ist surjektiv g.d.w. für alle Funktionen $g, h\colon B \longrightarrow C$ gilt:

    $$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.$$

Bemerkung: Hier ist C jeweils eine beliebige Menge, und g, h sind beliebige Funktionen $C \longrightarrow A$ bzw. $B \longrightarrow C$.

27. Welche der folgenden Relationen R_i auf den Mengen A_i sind Äquivalenzrelationen?

    (a) $A_1 = \mathbb{R}$, $R_1 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor\}$;

    (b) $A_2 = \mathbb{R}$, $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$;

    (c) $A_3 = \mathbb{Z}$, $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon 3 \,|\, x - y\}$;

    (d) $A_4 = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $R_4 = \{((x, y), (x', y')) \in \mathbb{A}_4 \times A_4 \mid xy' = yx'\}$.

28. Bestimmen Sie die Faktormenge und ein Repräsentantensystem für jede der Äquivalenzrelationen des vorigen Beispiels (Ex. 27).

29. Es seien X, Y Mengen, und $f \colon X \longrightarrow Y$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass

$$x \sim y :\Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

eine Äquivalenzrelation auf X darstellt. Geben Sie ein Argument, warum jede Äquivalenzrelation auf einer beliebigen Menge X durch obiges Konzept beschrieben werden kann.