Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
3. Übungsblatt für den 22. 10. 2018

15. Es sei $B \subseteq \mathbb{N}$. Zeigen Sie mittels Induktion nach k:

$$\exists_{l\in B}\, l \leq k \Rightarrow \exists_{m\in B}\, \forall_{j\in B}\, m \leq j.$$

16. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, \leq)$ eine wohlgeordnete Menge ist, i.e., jede nichtleere Teilmenge $B \subseteq \mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element. (Bemerkung: Sie können z.B. die Aussage des vorigen Beispiels verwenden.)

17. Zeigen Sie, dass es in der Menge $\mathbb{N}$ beliebig große Teilabschnitte gibt, die keine Primzahl enthalten, dass also

$$\forall_{L>0}\, \exists_{a,b\in\mathbb{N}}(b-a > L \wedge\ [a,b] \cap \mathbb{P} = \emptyset).$$

18. Zeigen Sie mit Induktion:

$$\forall_{a\in\mathbb{N}}\, \forall_{b\in\mathbb{N}}\, \exists_{d\in\mathbb{N}}\, \big(d|a \wedge d|b \wedge \forall_{c\in\mathbb{N}}(c|a \wedge c|b \Rightarrow c|d)\big).$$

19. Zeigen Sie: Eine komplexe Zahl z ist genau dann reell, wenn $z = \overline{z}$ gilt.

20. Es sei $I \neq \emptyset$. Welche der folgenden Aussagen sind zueinander logisch äquivalent?

(a) $\exists\, i \in I\ :\ (A_i \implies B)$

(b) $(\exists\, i \in I\ :\ A_i) \implies B$

(c) $\forall\, i \in I\ :\ (A_i \implies B)$

(d) $(\forall\, i \in I\ :\ A_i) \implies B$

Hinweis: Verwenden Sie die logische Äquivalenz von $P \implies Q$ zu $\neg P \vee Q$.

21. Eine Aussage (bzw. eine Aussageform) ist in `disjunktiver Normalform` wenn sie als eine Disjunktion von (endlich vielen) Konjunktionen dargestellt ist. So ist z.B. die Aussage

$$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg S)$$

in disjunktiver Normalform, nicht aber $\neg(P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$ (der linke Teil ist eine Negation und keine Konjunktion) und auch nicht $(Q \wedge R) \vee (P \Rightarrow Q)$ (der rechte Teil ist keine Konjunktion).

Jede Aussage, die als (aussagenlogische) Formel darstellbar ist, kann in eine äquivalente disjunktive Normalform gebracht werden. Zeigen Sie die Gültigkeit dieses Satzes exemplarisch für

(a) $\neg(P \vee (Q \Rightarrow P)) \iff \neg(P \Rightarrow Q)$;

(b) $(P \Rightarrow \neg Q) \vee (\neg P \Rightarrow Q)$;

(c) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$.

22. Die folgenden Aussagen sollen negiert werden. Das soll heißen, umklammern Sie die Formeln und setzen Sie ein Negationszeichen davor. Sodann wenden Sie die Regeln aus Abschnitt 1.3 des Vorlesungsskriptums schrittweise an, bis die Bereiche der auftretenden Negationszeichen nur mehr aus jeweils einem Prädikat bestehen, die Negationszeichen also möglichst weit innen stehen.

    (a) $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,\forall_x\,(|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$;

    (b) $\forall_{a\in\mathbb{N}}\,\forall_{b\in\mathbb{N}}\,\exists_{d\in\mathbb{N}}\,\big(d|a \wedge d|b \wedge \forall_{c\in\mathbb{N}}(c|a \wedge c|b \Rightarrow c|d)\big)$.