Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
2. Übungsblatt für den 15. 10. 2018

9. Zeigen Sie die folgenden Aussagen über die Teilbarkeitsrelation ganzer Zahlen (Skriptum, Satz 1.2.6):

   (a) $k|m \wedge k|n \Rightarrow k|m+n \wedge k|m-n$;

   (b) $k|m \Rightarrow k|mn$;

   (c) $k|m \wedge m|k \Rightarrow k = \pm m$;

   (d) $k|m \wedge m|n \Rightarrow k|n$.

10. In einer Buchhandlung kosten Sachbücher 16 und Romane 10 Euro. Wie viele Sachbücher bzw. Romane kann man um 84 Euro kaufen, ohne Restgeld zurck zu bekommen? Ist die Lösung eindeutig?

11. Sei P die Menge der Primzahlen und $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a, b > 1$ und Primfaktorenzerlegung

$$a = \prod_{p \in P} p^{e_p} \quad \text{und} \quad b = \prod_{p \in P} p^{f_p}.$$

   Zeigen Sie, dass

   (a) $ggT(a, b) = \prod_{p \in P} p^{\min(e_p, f_p)}$.

   (b) $kgV(a, b) = \prod_{p \in P} p^{\max(e_p, f_p)}$.

12. (a) Zeigen Sie mithilfe einer Wahrheitstabelle $P \implies Q \equiv \neg P \vee Q$

    (b) Zeigen Sie mithilfe der De Morganschen Regeln und (a), dass

$$((A \implies B) \wedge \neg B) \implies \neg A$$

    eine Tautologie ist.

    (c) Vereinfachen Sie folgende logische Beziehungen soweit als möglich

$$\neg(\exists a \in A \ \forall b \in A : P(a, b) \implies Q(a, b))$$

    Ermitteln Sie den Wahrheitswert der Aussage für die Interpretation A als $\mathbb{N}$, $P(a, b)$ als $a \mid b$ und $Q(a, b)$ als $a < b$.

13. Sei $P(a, b)$ eine Aussage über Elemente $a \in A$ und $b \in B$ mit Mengen A, B. Zeigen oder widerlegen Sie

    (a) $\exists a \in A \ \forall b \in B : P(a, b) \implies \forall b \in B \ \exists a \in A : P(a, b)$.

    (b) $\forall a \in A \ \exists b \in B : P(a, b) \implies \exists b \in B \ \forall a \in A : P(a, b)$.

14. Das “Sieb des Eratosthenes”:
    Mit folgender Vorschrift kann man alle Primzahlen bis n bestimmen:

(i) Lege eine Tabelle T aller natürlichen Zahlen bis n an, beginnend mit der kleinsten Primzahl $p = 2$;
(ii) Eliminiere in T alle durch p teilbaren Zahlen;
(iii) Gehe zur nächsten Zahl p in T (falls es kein weiteres p gibt, brich ab);
(iv) gehe zu (ii).

Mithilfe dieser Sieb-Methode kann man die Anzahl der Primzahlen bis n, $\pi(n)$, berechnen.

(a) Probiere dieses Sieb für $n = 15$ und $n = 20$ aus und überprüfe $\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n - 1}$.

(b) Das asymptotische Verhalten von $\pi(n)$ kann mit Hilfe der Riemannschen Zeta Funktion ζ bewiesen werden, wobei diese für komplexe z mit $\Re(z) > 1$ durch

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z} \tag{1}$$

definiert ist. Zeige, dass sich $\zeta(z)$ auch als

$$\zeta(z) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

schreiben lässt. Was lässt uns diese Darstellung über die Nullstellen von ζ sagen? Hinweis: Inspiriert von obigem Sieb, dividiere (1) durch 2^z und subtrahiere das Ergebnis ab. Genauso mit 3^z, usw.

(c) *Bonus:* Um das Vorgehen in (b) zu rechtfertigen, muss man die Konvergenz von ζ und der Reihe nach jedem Eliminationsschritt begründen.