Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
12. Übungsblatt für den 28. 01. 2019

86. Es sei V ein reeller innerer Produktraum. Zeigen Sie:

$$\forall x, y \in V : \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x\,,\, y\rangle \tag{1}$$

87. Ist V ein komplexer innerer Produktraum, dann gilt für alle $x, y \in V$

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = 4\langle x\,,\, y\rangle. \tag{2}$$

Zeigen Sie diese Identität.

88. Sei V ein innerer Produktraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Zeigen Sie

$$|\langle x\,,\, y\rangle| \leq \frac{1}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \quad \forall x, y \in V.$$

89. (a) Es sei $V = C[a,b]$ der reelle Vektorraum der stetigen Funktionen $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Zeigen Sie, dass

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \tag{3}$$

ein inneres Produkt auf V ist.

(b) Zeigen Sie, dass dieselbe Zuordnung (3) auch ein inneres Produkt auf dem reellen Vektorraum $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n ist.

90. Statten Sie $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ mit dem inneren Produkt von Beispiel 89 (b) aus. Berechnen Sie eine Basis des Unterraums jener Polynome in $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$, die orthogonal auf $p_1 = 1$ und auf $p_2 = x$ stehen.

91. Sei V ein innerer Produktraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), $x_1, \ldots, x_n \in V$. Betrachten Sie die $n \times n$-Matrix

$$G = \big(\langle x_i\,,\, x_j\rangle\big)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Ihre Determinante $g := \det G$ heißt `Gramsche Determinante`. Zeigen Sie:

$$\begin{array}{l} g \geq 0 \\ g = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1, \ldots, x_n \text{ linear abhängig.} \end{array}$$

92. Sei V ein innerer Produktraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) der Dimension $n < \infty$. Zeigen Sie:

(a) $\forall v \in V$ ist die Abbildung $x \mapsto \langle x\,,\, v\rangle$ ein lineares Funktional (i.e. eine lineare Abbildung von V in den Grundkörper) d.h. ein Element von $V^\star$.

(b) Für jedes lineare Funktional $\alpha \in V^\star$ gibt es genau ein $v \in V$ sodass

$$\forall x \in V: \ \alpha(x) = \langle x\,,\, v\rangle.$$

`Anleitung:` Ergänzen Sie eine Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ von $\ker(\alpha)$ zu einer Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\} \cup \{b_n\}$ von V und setzen Sie $v := \overline{\alpha(b_n)}\, b_n$.

93. Fortsetzung von Beispiel 92.

(a) Nach 92 (b) ist die Abbildung $s\colon V \longrightarrow V^\star$, $v \mapsto (x \mapsto \langle x\,,\, v\rangle)$, also

$$s_v(x) = \langle x\,,\, v\rangle$$

bijektiv. Zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} s_{v+w} & = & s_v + s_w \quad \forall v, w \in V; \\ s_{\lambda v} & = & \overline{\lambda} s_v \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})\ \forall v \in V. \end{array}$$

(b) Zeigen Sie, dass $\langle s_v\,,\, s_w\rangle := \langle w\,,\, v\rangle$ ein inneres Produkt auf $V^\star$ definiert.