Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
11. Übungsblatt für den 14. 01. 2019

77. Es sei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und $D\colon \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Determinantenfunktion. Berchnen Sie

    (a) $D(e_3, e_1, e_2)$,

    (b) $D(2e_3 - e_2, 5e_1, 3e_1 - 2e_2)$

    nur mit Hilfe der Eigenschaften (D1), (D2), (D3') und (D4) (Siehe Definition 4.1.1).

78. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung von Vektoren an der Ebene
$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$
    Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von f durch geometrische Überlegungen.

79. Sei V ein endlichdim. Vektorraum über K mit Basis B. Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. Zeigen Sie: $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von f genau dann wenn λ ein Eigenwert der Darstellungsmatrix $\mathcal{A}(f, B, B)$ ist.

80. Sei V ein endlichdim. Vektorraum über einem Körper K, sei $\lambda \in K$ und sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{im}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq V$ falls λ ein Eigenwert von f ist. Gilt auch die Umkehrung?

81. Es sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

    (a) Das Produkt der Eigenwerte von A (mit algebraischer Vielfachheit) ist $\det A$.

    (b) Die Summe der Eigenwerte ist die Spur von A, i.e., $\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.

82. Bestimmen Sie die explizite Lösung der Rekursion
$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$
    mit Anfangswerten $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

83. Berechnen Sie A^n $(n \in \mathbb{N})$ von
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

84. Es sei p ein Polynom, A eine quadratische Matrix, und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass dann $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$ ist.

85. Finden Sie das Minimalpolynom der folgenden Matrizen.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$