Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
10. Übungsblatt für den 07. 01. 2019

69. Sei P_n die Permutationsgruppe.

    (a) Zeigen Sie, dass $A_n = \{\sigma \in P_n \mid sign(\sigma) = 1\}$ eine Untergruppe von P_n bildet.

    (b) In einem regelmässigen n-Eck werden die Eckpunkte von 1 bis n durchnummeriert. Welchen geometrischen Operationen entsprechen

    $$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}?$$

    (c) Gilt $\rho, \sigma \in A_n$?

70. Es sei A eine $n \times n$ Matrix in oberer Dreiecksform ($a_{ij} = 0$ für $i > j$). Zeigen Sie

    (a) durch Induktion nach n;

    (b) mit Hilfe der Leibnizschen Determinantenformel,

    dass
    $$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

71. Gegeben ist die Matrix
    $$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
    Berechnen Sie das Spektrum von A, sowie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte.

72. Es sei v ein Eigenvektor einer quadratischen Matrix A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie

    (a) v ist ein Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert λ^2.

    (b) Ist A invertierbar, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

73. Sei A eine $n \times n$ Matrix mit $\det(A) \neq 0$ und $\mathbf{0}$ der Nullvektor. Zeigen Sie mithilfe der Cramerschen Regel, dass
    $$Ax = \mathbf{0}$$
    die eindeutige Lösung $x = \mathbf{0}$ hat.

74. Invertieren Sie die Matrix
    $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$
    mithilfe der Adjugierten $adj(A)$.

75. (a) Geben Sie alle Lösungen für folgendes Differentialgleichungssystem an

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

(b) Welche Lösungen können Sie mit gleicher Vorgehensweise für

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

finden? Sind das alle Lösungen?

76. Sei A eine $n \times n$ Matrix. Zeigen Sie:

(a) Falls A den Eigenwert 0 mit algebraischen Vielfachheit n hat, dann ist A nilpotent, also, es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $A^m = 0$.

(b) Falls A invertierbar ist, dann lässt sich A^{-1} als Linearkombination von Potenzen von A mit Exponent kleiner oder gleich n darstellen.