Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
1. Übungsblatt für den 8. 10. 2018

1. Zeigen Sie ausschlielich mit den Peano-Axiomen, Definition 1.2.1 und den im Anschluss daran bewiesenen Sätzen im Skriptum, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : n + n \text{ ist gerade.}$$

   Als Definition von *gerade* verwenden Sie die beiden Eigenschaften

   - 0 ist gerade.
   - Wenn n gerade ist, dann auch $S(S(n))$.

2. Zeigen Sie mittels Induktion oder direkt

   (a) $\forall n \in \mathbb{N} : n \neq S(n)$.

   (b) $\forall n, k \in \mathbb{N} : n \neq 0 \Rightarrow n + k \neq 0$.

   (c) $\forall n, k \in \mathbb{N} : n + k = 0 \Rightarrow n = 0 \wedge k = 0$.

3. Zeigen Sie mittels Induktion

   (a) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

4. Es seien a, b beliebige Zahlen. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ den binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

5. Zeigen Sie für alle $n \geq 4$:

$$n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}.$$

6. Beweisen Sie, dass $n^5 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar ist.

7. Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ induktiv die Funktion

$$f(x,n) = \begin{cases} 1, \text{ falls } n = 0 \\ x \cdot f(x, n-1), \text{ falls } n \geq 1 \text{ und } n \text{ ungerade} \\ f(x^2, n/2), \text{ falls } n \geq 2 \text{ und } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass

$$f(x,n) = x^n$$

   gilt.

8. (a) Beweisen Sie für alle $n \in N$ und $x \neq 1$ die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

(b) Berechnen Sie für alle $n \in N$ und $x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} k x^k$$

mithilfe von (8a).
Hinweis: geeignetes Differenzieren.

(c) In der Festkörperphysik werden Ihnen oft folgende Summen begegnen:

$$S(m, L) = \sum_{k=0}^{L-1} e^{2\pi i k m / L},$$

wobei m und L natürliche Zahlen sind. Berechnen Sie $S(m, L)$ mithilfe von (8a).