`Name: ..................................`

`Matr.Nr.: ..................................`

`Stud.Kennz.: ..............................`

Klausur
"Lineare Algebra für Physiker(innen)" (326.017)
29.1.2019

Bitte folgendes beachten:

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

Alle Antworten sind zu begründen; ein simples "ja/nein" reicht nicht.

(1) Die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens 3, $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$, sind ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(a) Ist $\{x^3+1, x^3+x^2+1, x^3+x^2+x+1, x^2+x\}$ eine Basis für $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$?
(b) Ist $\{x^3+1, x^3+x^2+1, x^3+x^2+x, x^2+x\}$ eine Basis für $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$?

(2) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, K ein Körper.
Zeige:
Sind $v, w \in K_n$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A, dann sind v und w linear unabhängig.

(3) Betrachte die lineare Funktion f von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$, definiert als

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)\ .$$

(a) Gibt es Vektoren x für welche gilt $f(x) = 2x$? Welche?
(a) Gibt es Vektoren x für welche gilt $f(x) = 3x$? Welche?

(4) Sei $V = \mathrm{span}\{x, x^2\}$ der Vektorraum der quadratischen Polynome ohne konstanten Anteil über dem Körper $\mathbb{R}$. Betrachte die Bilinearform $f : V \times V \to \mathbb{R}$, definiert als

$$f(p(x), q(x)) = \int_0^1 \int_0^1 p(x) \cdot q(y) dx dy \ .$$

(a) Bestimme die Darstellungsmatrix von f bzgl. der kanonischen Basis $B = \{x,\ x^2\}$.

(b) Berechne $f(x^2 + x, 2x^2 + x)$ mittels der Darstellungsmatrix.

(5) Der Homomorphiesatz für Vektorräume besagt:
Ist f eine lineare Abbildung von V nach W (Vektorräume über dem Körper K), dann gilt $V_{/\mathrm{kern}(f)} \cong \mathrm{im}(f)$.
Im Beweis verwendet man die Abbildung $i : V_{/\mathrm{kern}(f)} \longrightarrow \mathrm{im}(f)$ mit $\overline{v} \mapsto f(v)$, wobei $\overline{v}$ die Äquivalenzklasse von v im Faktorraum $V_{/\mathrm{kern} f}$ bezeichnet.
Zeige: *i ist wohldefiniert; also $f(v_1) = f(v_2)$ falls $\overline{v_1} = \overline{v_2}$.*