Name: ....

Matr.Nr.: ....

Stud.Kennz.: ....

Klausur
"Lineare Algebra für Physiker(innen)" (326.017)
11.4.2019

Bitte folgendes beachten:

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

Alle Antworten sind zu begründen; ein simples "ja/nein" reicht nicht.

(1) Sei A die folgende Matrix über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Hermite-Matrix H_A zur Matrix A, sowie den Rang von A.
(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.
(c) Für $b_1 = (2,2,0)^T, b_2 = (1,1,1)^T$ bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $A \cdot x = b_i$.

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n über $\mathbb{R}$. Sowohl $B = (1, x, x^2)$ als auch $C = (1, x+1, (x+1)^2)$ sind geordnete Basen von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$. Sei d die Differentiationsabbildung

$$\begin{array}{cccc} d: & \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \\ & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 & \mapsto & a_1 + 2a_2 x \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrizen $\mathcal{A}_B^C$ sowie $\mathcal{A}_C^B$.
(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen von d bzgl. B als auch bzgl. C, also

$$\mathcal{A}(d, B, B) \qquad \text{sowie} \qquad \mathcal{A}(d, C, C)\ .$$

umblättern !

(3) (a) Wie sieht die Rotationsmatrix der Rotation r aus, welche den Punkt $P = (1, 0)$ in den Punkt $Q = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ transformiert, also für welche gilt $r(P) = Q$?
(b) Bestimmen Sie $r(1, 1)$.
(c) Ist die Rotation um einen Winkel α eine lineare Funktion auf $\mathbb{R}^2$?

(4) Sind die folgenden Abbildungen $\langle .|. \rangle$ jeweils ein inneres Produkt?
(a) $\langle .|. \rangle$ ist die Abbildung von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$:

$$\langle u|v \rangle = \langle (u_1, u_2, u_3)|(v_1, v_2, v_3) \rangle = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1 \ .$$

(b) $\langle .|. \rangle$ ist die Abbildung von $C([0, 1], \mathbb{R})^2$ (dem Raum der stetigen Funktionen von $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$) in den Grundkörper $\mathbb{R}$:

$$\langle .|. \rangle = f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1) \ .$$

(5) Sei $V = C([0, 1], \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum der stetigen Funktionen von $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$. Auf $V \times V$ betrachten wir das innere Produkt

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f g \, dx.$$

(a) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis für den Teilraum $W = \mathrm{span}(1, x, x^2)$.
(b) Bestimmen Sie die beste Approximation (Fourier-Approximation) zu x^3 in W, also dasjenige $w \in W$ für welches gilt:

$$\forall w' \in W : \| \ x^4 - w \ \| \leq \| \ x^4 - w' \ \| \ .$$