Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
9. Übungsblatt für den 11. 12. 2017

Von letzter Woche (Übungsgruppe Zillich):

49. (b,c,d,e)

Neue Beispiele:

50.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Berechnen Sie alle Lösungen X des linearen Gleichungssystems $A \cdot X = b$.

51. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V, die mit Addition und Skalarmultiplikation verträglich ist (eine `Kongruenzrelation`, Satz 3.2.12). Zeigen Sie, dass es einen Unterraum $W \subseteq V$ gibt, dessen auf V induzierte Äquivalenzrelation $\sim_W$ mit $\sim$ übereinstimmt. Die Räume V/W, wobei W alle Unterräume von V durchläuft, sind also alle möglichen Faktorräume von V.

52. Es seien V_1, V_2 Vektorräume über demselben Körper K, und $W_1 \subseteq V_1$, $W_2 \subseteq V_2$ Unterräume. Weiters gelte für eine lineare Abbildung $f\colon V_1 \longrightarrow V_2$, dass $f(W_1) \subseteq W_2$. Zeigen Sie, dass es dann eine lineare Abbildung $h\colon V_1/W_1 \longrightarrow V_2/W_2$ gibt, die für alle $v \in V_1$ die Klasse $K_{\sim_{W_1}}(v)$ auf $K_{\sim_{W_2}}(f(v))$ abbildet.

53. Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung
$$f\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2} \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2},\ X \mapsto A \cdot X.$$

54. Gegeben sind die Abbildungen
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, &\quad (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + y), \\ g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, &\quad (x, y, z) \mapsto (x + y, x + y - z). \end{aligned}$$
Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ so, dass $h \circ f = g$.

55. Es bezeichne $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene
$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$
Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von f.

56. Gegeben ist die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Berechnen Sie über dem Körper $\mathbb{R}$:
   (a) die Eigenwerte von A;
   (b) zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.