Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
8. Übungsblatt für den 4. 12. 2017

Von letzter Woche (Übungsgruppe Zillich):

44. (a-b)

Neue Beispiele:

45. Matrizen A und B seien ähnlich, $A \sim B$. Zeige, dass auch $\exp(A) \sim \exp(B)$.
Hinweis: $\exp(A)$ und $\exp(B)$ sind genauso definiert wie $\exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, nämlich als Taylorreihe.

46. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ und V^* der dazu duale Vektorraum mit der zu B dualen Basis $B^* = \{\beta^1, \dots, \beta^n\}$. Ein $v \in V$ wird durch B dargestellt als $v = \sum_{i=1}^n \lambda^i b_i$ und $\phi \in V^*$ als $\phi = \sum_{i=1}^n \mu_i \beta^i$.

    Zeige: $\lambda^i = \beta^i(v)$ und $\mu_i = \phi(b_i)$

47. Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ seien die kanonische Basis B_1 und noch eine weitere Basis $B_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit den Basiselementen $b_1 = (1, 1, 0)$, $b_2 = (1, 0, 1)$ und $b_3 = (0, 1, 1)$ gegeben.

    (a) Im dualen Vektorraum V^* erhalten wir die zu B_1 duale Basis B_1^* und die zu B_2 duale Basis B_2^*. Bestimme die Koordinaten von B_2^* bezüglich B_1^*.

    (b) Stelle, mithilfe von B_2^* und unter Verwendung von Bsp. 46, den Vektor $v = (1, 0, 0)$ in der Basis B_2 dar.

    Bemerkung: in der Festkörperphysik heisst die duale Basis auch reziproke Basis.

48. Beantworte folgende Fragen (mit Begründung, aber ohne strenge Beweise):

    (a) Gegeben sei folgender Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$:
    $V \subseteq \mathrm{Fun}([a, b], \mathbb{C})$ seien die quadratintegrablen Funktionen auf dem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $V = L^2[a, b]$. Sei $f \in V$. Bilden die linearen Funktionale χ, definiert durch $\langle \chi | f \rangle := \int_a^b dx\, \chi(x)^* f(x)$ (hier bedeutet der Stern komplex konjugieren) den Dualraum V^*?

    (b) Ist $B = \{x^n | n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis des Vektorraums aller Polynome (beliebigen Grades), $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$?

    (c) **Bonus:** Wir betrachten den Vektorraum stetiger Funktionen auf dem Intervall $[0, \pi]$,
    $V = \{f \in \mathrm{Fun}([0, \pi], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 = f(\pi) \wedge f \text{ stetig}\}$. Bildet $B = \{\sin(n\pi) | n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$ eine Basis von V? Betrachte z.b. die Funktion $f \in V$ mit $f(x) = x(x - \pi)$.

49. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung, für die gilt:

    $$(1, 0, 0) \to (1, 0, 1, 1)\ , \qquad (0, 1, 0) \to (0, 1, 1, 1)\ , \qquad (0, 0, 1) \to (1, -1, 0, 0)$$

    (a) Ist f durch diese Angaben eindeutig bestimmt?

    (b) Bestimme die Dimension von $\mathrm{Im}(f)$, eine Basis von $\mathrm{Im}(f)$.

    (c) Bestimme den Faktorraum $\mathbb{R}^4/\mathrm{Im}(f)$ und eine Basis von $\mathbb{R}^4/\mathrm{Im}(f)$.

    (d) Sei $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}$. Bestimme die Dimension von U. Bestimme $f(U)$ und die Dimension von $f(U)$ sowie eine Basis von $f(U)$.

    (e) Ist f ein Monomorphismus?