Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
7. Übungsblatt für den 20. 11. 2017

39. Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}_5$ (ganze Zahlen modulo 5).

(a)
$$\begin{array}{rcrcrl} \bar{2}x & + & \bar{3}y & + & z & = \bar{2} \\ x & + & \bar{2}y & + & \bar{3}z & = \bar{0} \\ \bar{4}x & + & \bar{3}y & + & z & = \bar{1} \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & \bar{3}y & + & \bar{2}z & = \bar{2} \\ \bar{3}x & + & \bar{2}y & + & z & = \bar{2} \end{array}$$

40. Der Vektor $x \in \mathrm{Mat}_{N\times 1}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^N$ stelle eine Reihe von Daten dar, z.b. sei x_n $(n = 0, \ldots, N-1)$ die Signalstärke zu einem Zeitpunkt $t_n = n\Delta t$, wobei Δt die Länge eines Zeitschritt ist. Wir definieren eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbb{C})$ mit den Elementen $A_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}}\, e^{2\pi i\, k\, n/N}$, wobei $i = \sqrt{-1}$. Das Produkt $Ax =: \tilde{x}$ heisst Diskrete Fouriertransformation.

   (a) Bestimme $\tilde{x}$ für ein zeitlich konstantes Signal, z.b. $x = (1, 1, 1, \ldots, 1)$.
   Hinweis: endliche geometrische Reihe!

   (b) Zeige, dass man die Inverse von A erhält durch komplex konjugieren aller Elemente von A, $(A^{-1})_{pq} = A^*_{pq}$.

   (c) **Bonus:** Berechne die diskrete Fouriertransformation numerisch für ein Testsignal x (z.b. sinus-Schwingung, gedämpfte Schwingung, Gauss,. . .).

41. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine $n \times n$-Matrix und $x_0, b \in \mathbb{R}^n$ Vektoren. Wir definieren x_k rekursiv durch $x_k = Ax_{k-1} + b$.
Zeige: $x_k = A^k x_0 + (I_n - A^k)(I_n - A)^{-1} b$, falls $I_n - A$ invertierbar ist.

42. $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ist der Vektorraum der 2×2 Matrizen über dem Körper der komplexen Zahlen. Die Teilmenge B besteht aus folgenden 4 Matrizen:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Zeige, dass B eine Basis von $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ist.

   (b) Zeige, dass der Kommutator von 2 Matrizen der Basis B wieder ein Element aus B oder die Nullmatrix ist.

43. Sei V der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ $(n \geq 3)$. Welche der Teilmengen $T_i \subseteq \mathbb{R}^n$ sind Unterräume von $\mathbb{R}^n$?

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 < 0\} \\ T_2 &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 \cdot x_2 = 0\} \\ T_3 &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 \in \mathbb{Q}\} \\ T_4 &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_2 = x_1^2\} \\ T_5 &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i = x_{i+2}, i = 1, \ldots, n-2\} \\ T_6 &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + 2x_3 = 2\} \end{aligned}$$

44. Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bildet den Vektorraum $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$, siehe Beispiel 3.1.4 aus der Vorlesung.

   (a) Bilden die geraden Funktionen $F_g = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}$ bzw. die ungeraden Funktionen $F_u = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)\}$ einen Unterraum von $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

   (b) Zeige, dass $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f_g + f_u | f_g \in F_g \wedge f_u \in F_u\}$.